Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

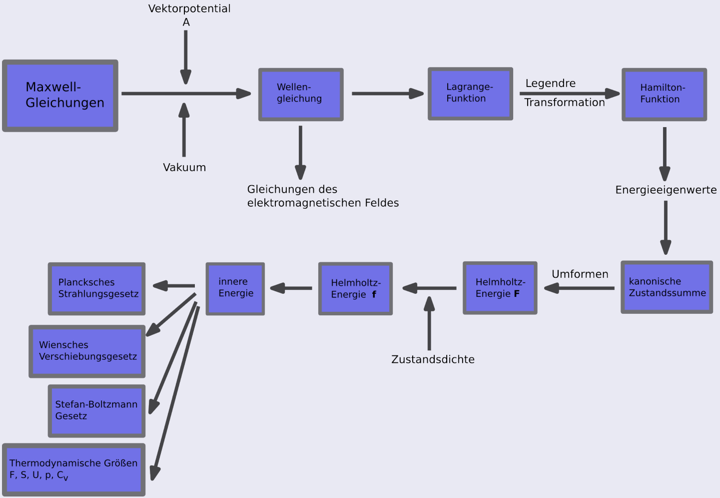
Gregor Pobegen

18. Juni 2008

1. Energiewerte
   - MAXWELL-Gleichungen
   - Wellengleichung
   - LAGRANGE-Funktion
   - HAMILTON-Funktion

1. Zustandssumme
   - Kanonische Zustandssumme
   - HELMHOLTZsche freie Energie
   - Innere Energie

Übersicht


Vektorpotential
A
Maxwell-
Gleichungen
Wellen-
gleichung
Lagrange-
Funktion
Legendre
Transformation
Hamilton-
Funktion
Vakuum
Gleichungen des
elektromagnetischen Feldes
Energieeigenwerte
Plancksches
Strahlungsgesetz
innere
Energie
Helmholtz-
Energie f
Helmholtz-
Energie F
Umformen
kanonische
Zustandssumme
Wiensches
Verschiebungsgesetz
Zustandsdichte
Stefan-Boltzmann
Gesetz
Thermodynamische Größen
F, S, U, p, C_V

Behandelt wird die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes im Vakuum. Das bedeutet, es existiert kein Potential

$$V = 0 \tag{1}$$

und keine freien Ladungsträger, damit auch keine Stromdichte

$$\vec{j} = 0 \quad . \tag{2}$$

Erst durch die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes wurde es zum Beispiel möglich, das PLANCKsche Strahlungsgesetz herzuleiten.

MAXWELL-Gleichungen

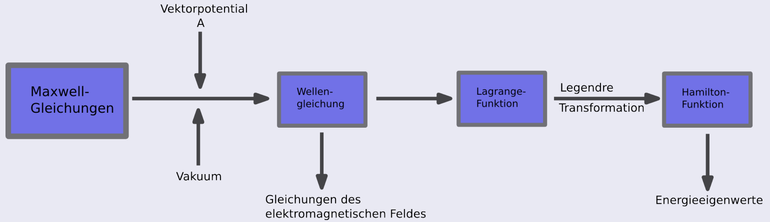
$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3}$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \tag{4}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{6}$$

Übersicht


Vektorpotential
A
Maxwell-
Gleichungen
Vakuum
Wellen-
gleichung
Gleichungen des
elektromagnetischen Feldes
Lagrange-
Funktion
Legendre
Transformation
Hamilton-
Funktion
Energieeigenwerte

Einführung des Vektorpotentials $\vec{A}$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{7}$$

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{8}$$

Neue Gleichungen mit $\vec{A}$

Aus den MAXWELL-Gleichungen wird dann mit der COULOMB-Eichung $\nabla\vec{A} = 0$, außerdem $\vec{J} = 0$ und $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$\nabla\vec{E} = 0 \longrightarrow \nabla\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

$$\nabla\vec{B} = 0 \longrightarrow \nabla(\nabla\times\vec{A}) = 0 \tag{10}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{A} \tag{11}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \longrightarrow \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \tag{12}$$

Für die Gleichung 12 kann die Vektoridentität $\nabla \times (\nabla \times \vec{w}) = \nabla(\nabla \vec{w}) - \nabla^2 \vec{w}$ angewendet werden.

Wellengleichung

$$\begin{aligned} -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \\ &= \nabla \underbrace{(\nabla \vec{A})}_{=0} - \nabla^2 \vec{A} \\ \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \nabla^2 \vec{A} \end{aligned} \tag{13}$$

Somit folgt also direkt aus den MAXWELL-Gleichungen mit der Wahl $V = 0$ und $\vec{j} = 0$ die Wellengleichung welche zum Beispiel von

Wahl

$$\vec{A}_s = A_0^s \vec{e_z} \cos(\vec{k}x - \omega_s t) \tag{14}$$

gelöst wird. Der Index s indiziert dabei die verschiedenen Möglichkeiten der Wahl von ω.

Der Ansatz 14 ist eine Lösung der Gleichung 13 wegen:

$$\begin{aligned}
\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_s}{\partial t^2} &= \nabla^2 \vec{A}_s \\
-\mu_0\epsilon_0\omega_s^2 \vec{A}_s &= -k_x^2 \vec{A}_s \\
\frac{\omega_s^2}{k_x^2} &= \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} \stackrel{!}{=} c_0^2 \\
\Rightarrow \frac{\omega_s}{k_x} &= c_0 \qquad (15) \\
\Rightarrow c_0 &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \qquad (16)
\end{aligned}$$

c_0 definiert hier die Lichtgeschwindigkeit.

Das elektrische und magnetische Feld sind dann sich in x-Richtung ausbreitende Wellen:

Feldgleichungen

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A}_s \\ &= A_0^s k_x \vec{e_y} \sin(k_x x - \omega_s t) \qquad (17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}_s}{\partial t} \\ &= A_0^s \omega_s \vec{e_z} \sin(k_x x - \omega_s t) \qquad (18)\end{aligned}$$

Die beiden Wellen stehen dabei senkrecht aufeinander.

Wellengleichung für das Vektorpotential

$$\nabla^2 \vec{A}_s = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_s}{\partial t^2}$$
$$c^2 k_x^2 \vec{A}_s = \frac{\partial^2 \vec{A}_s}{\partial t^2} \tag{19}$$

Daraus folgt die

LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{\dot{\vec{A}}_s^2}{2} - \frac{c_0^2 k_x^2}{2} \vec{A}_s^2, \quad \dot{\vec{A}}_s = \frac{\partial \vec{A}_s}{\partial t} \tag{20}$$

Verallgemeinerte Impuls

$$p_s := \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{A}}_s} = \dot{\vec{A}}_s \tag{21}$$

LEGENDRE-Transformation

$$\begin{aligned} H &= p_s \dot{\vec{A}}_s - L \\ &= \dot{\vec{A}}_s \dot{\vec{A}}_s - \left(\frac{\dot{\vec{A}}_s^2}{2} - \frac{c_0^2 k_x^2}{2} \vec{A}_s^2 \right) \\ &= \frac{\dot{\vec{A}}_s^2}{2} + \frac{c_0^2 k_x^2}{2} \vec{A}_s^2 \end{aligned} \tag{22}$$

Hamilton-Operator

Ersetzen mit $-i\hbar\nabla$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2}\nabla^2 + \frac{c_0^2 k_x^2}{2}\vec{A}_s^2 \tag{23}$$

Schrödingergleichung

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2}\nabla^2\psi + \frac{c_0^2 k_x^2}{2}\vec{A}_s^2\psi \tag{24}$$

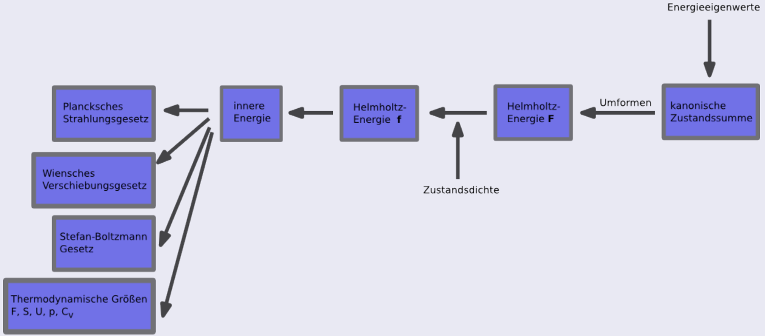
Diese Schrödingergleichung ist mathematisch äquivalent zum quantenmechanischen harmonischen Oszillator. Dessen Eigenwertlösung ist bekannt:

Lösung

Energieeigenwerte

$$E_s = \hbar\omega_s\left(j_s + \frac{1}{2}\right), \quad j_s = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Übersicht


Energieeigenwerte
Plancksches Strahlungsgesetz
innere Energie
Helmholtz-Energie f
Helmholtz-Energie F
Umformen
kanonische Zustandssumme
Wiensches Verschiebungsgesetz
Zustandsdichte
Stefan-Boltzmann Gesetz
Thermodynamische Größen
F, S, U, p, C_V

Kanonische Zustandsumme

$$Z(T) = \sum_q e^{-\frac{E_q}{k_B T}} \tag{26}$$

Die Energie eines Mikrozustandes $E_q = \sum_{s=1}^{s_{max}} \hbar\omega_s(j_s + \frac{1}{2})$ beinhaltet also alle vorkommenden Frequenzen.

$$\begin{aligned} Z(T) &= \sum_{j_1=0}^{j_{max}} \cdots \sum_{j_{s_{max}}=0}^{j_{max}} \prod_{s=1}^{s_{max}} e^{-\frac{\hbar\omega_s}{k_B T}(j_s+\frac{1}{2})} \\ &= \sum_{j_1=0}^{j_{max}} e^{-\frac{\hbar\omega_1}{k_B T}(j_1+\frac{1}{2})} \cdots \sum_{j_{s_{max}}=0}^{j_{max}} e^{-\frac{\hbar\omega_{s_{max}}}{k_B T}(j_{s_{max}}+\frac{1}{2})} \\ &= \prod_{s=1}^{s_{max}} \sum_{j_s=0}^{j_{max}} e^{-\frac{\hbar\omega_s}{k_B T}(j_s+\frac{1}{2})} \end{aligned} \tag{27}$$

$$
\begin{aligned}
Z(T) &= \prod_{s=1}^{s_{max}} \sum_{j_s=0}^{j_{max}} e^{-\frac{\hbar\omega_s}{k_\mathrm{B} T}(j_s+\frac{1}{2})} \\
&= \prod_{s=1}^{s_{max}} e^{-\frac{\hbar\omega_s}{2k_\mathrm{B} T}} \left[\sum_{j_s=0}^{j_{max}} \left(e^{-\frac{\hbar\omega_s}{k_\mathrm{B} T}} \right)^{j_s} \right] \\
&= \prod_{s=1}^{s_{max}} \frac{e^{-\frac{\hbar\omega_s}{2k_\mathrm{B} T}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega_s}{k_\mathrm{B} T}}} \quad , \text{ mit } j_{max} \longrightarrow \infty
\end{aligned} \tag{28}
$$

HELMHOLTZsche freie Energie

$$
\begin{aligned}
F &= -k_\mathrm{B} T \ln Z \\
&= \sum_s \frac{\hbar\omega_s}{2} + \underbrace{k_\mathrm{B} T \sum_s \ln\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega_s}{k_\mathrm{B} T}}\right)}_{=:f}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

ω_s ist jedoch nicht diskret. Real ist die Frequenz kontinuierlich, jedoch nach der Zustandsdichtefunktion $D(\omega)$, verteilt.Für den Wellenvektor k lässt sich die Zustandsdichte mit

$$D(k)dk = 2\frac{4\pi k^2}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}dk = \frac{k^2 L^3}{\pi^2}dk \tag{30}$$

herleiten. Daraus folgt mit $\omega = ck$

Zustandsdichtefunktion

$$D(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}d\omega \tag{31}$$

$$
\begin{aligned}
f &= k_B T \sum_s \ln\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega_s}{k_B T}}\right) \\
&\approx k_B T \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \ln\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) \\
&= \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 c^3 \pi^2} \int_0^\infty dx\, x^2 \ln(1 - e^{-x}) \quad , x = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \\
&= \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 c^3 \pi^2} \left(\underbrace{\frac{x^3}{3} \ln(1 - e^{-x})\Big|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty dx \frac{x^3}{3} \frac{1}{e^x - 1} \right) \\
&= -\frac{(k_B T)^4}{3\hbar^3 c^3 \pi^2} \int_0^\infty dx\, x^3 \frac{1}{e^x - 1} \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Thermodynamische Zusammenhänge: $u = f + Ts$, $s = -\frac{\partial f}{\partial T}$. Wegen $f \sim T^4$ ist $Ts = -4f$ und deswegen

Innere Energie u

$$u = f + Ts = -3f = \frac{(k_\mathrm{B} T)^4}{\hbar^3 c^3 \pi^2} \int_0^\infty dx\, x^3 \frac{1}{e^x - 1} \tag{33}$$

Daraus folgt direkt mit $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, $x = \frac{hc}{\lambda k_\mathrm{B} T}$ das

Planck sches Strahlungsgesetz

$$u(\lambda) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_\mathrm{B} T}} - 1} d\lambda \tag{34}$$

Durch Nullsetzen der Ableitung findet man das

WIENsches Verschiebungsgesetz

$$\lambda_{max} = \frac{2897,8\mu m\mathrm{K}}{T} \tag{35}$$

Mit $\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$ kommt man zum

STEFAN-BOLTZMANN-Gesetz

$$I = \frac{2\pi^5 k_\mathrm{B}^4}{15h^3c^2} T^4 \tag{36}$$

Thermodynamische Größen

Sind über die aus der statistischen Physik bekannten Zusammenhänge durch einsetzen rasch herzuleiten.

Wichtig

Genau die selbe Herangehensweise an das Problem quantisiert auch:

- Akustische Wellen
- Magnetonen
- Plasmonen
- und viele mehr. . .