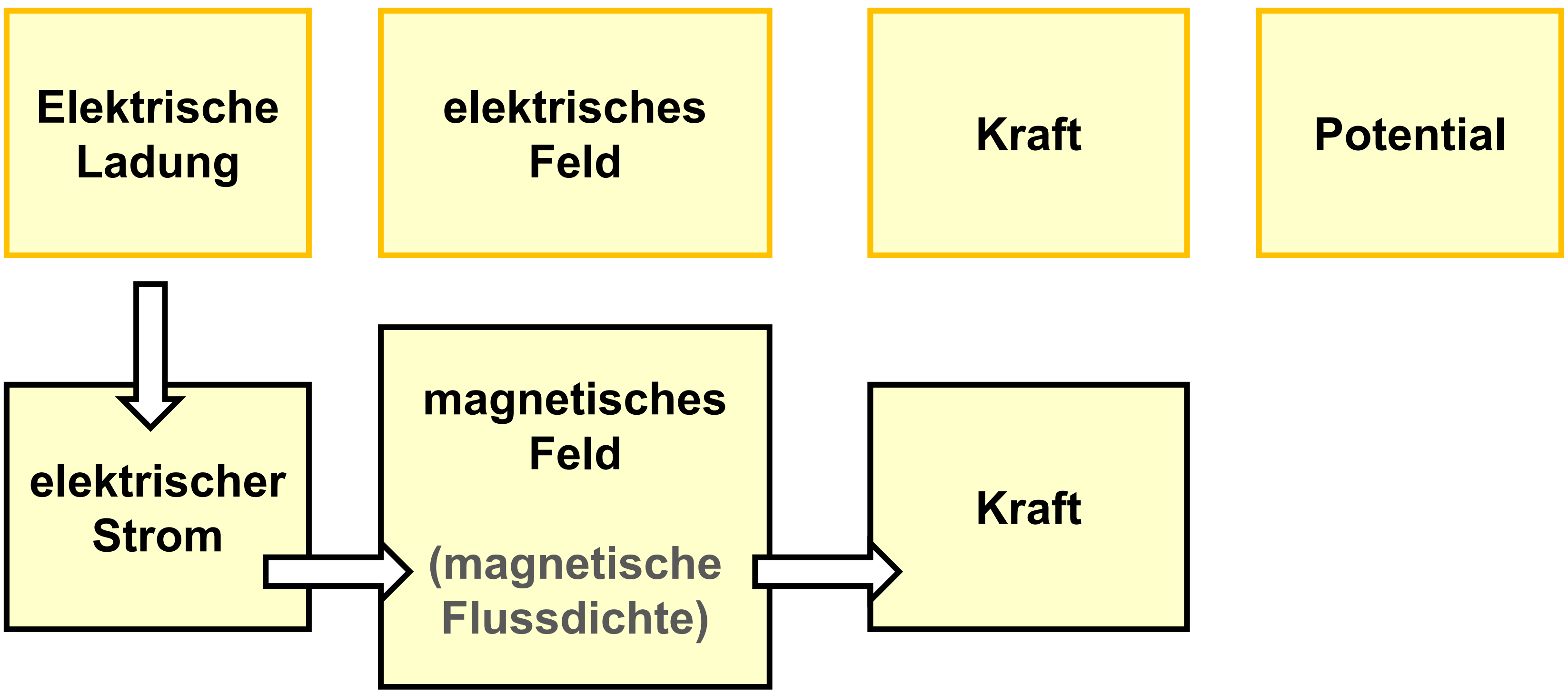
15. Magnetismus

25 Nov. 2019

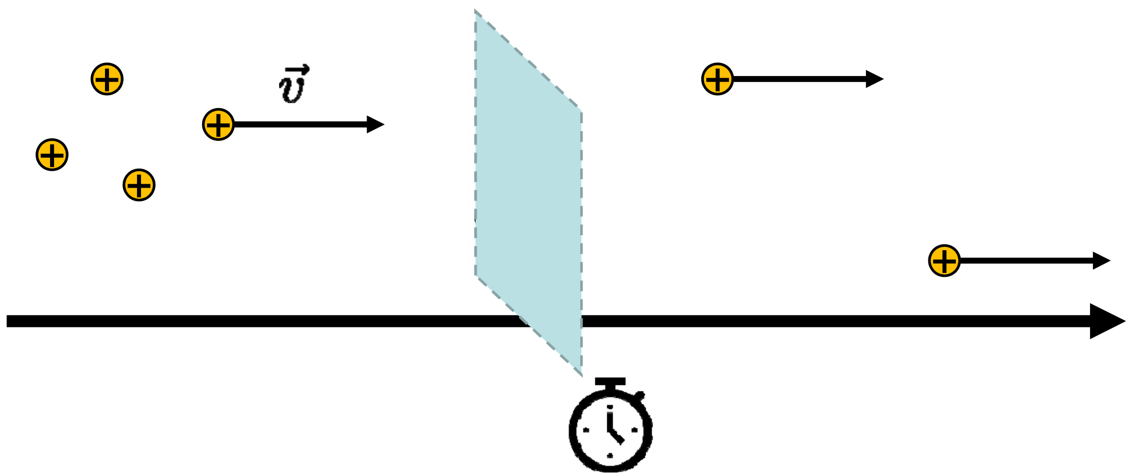
Elektrizität → Magnetostatik



Buch: Hering, Kapitel 4

Elektrischer Strom

geladene Teilchen → Kraft → Bewegung



Stromstärke

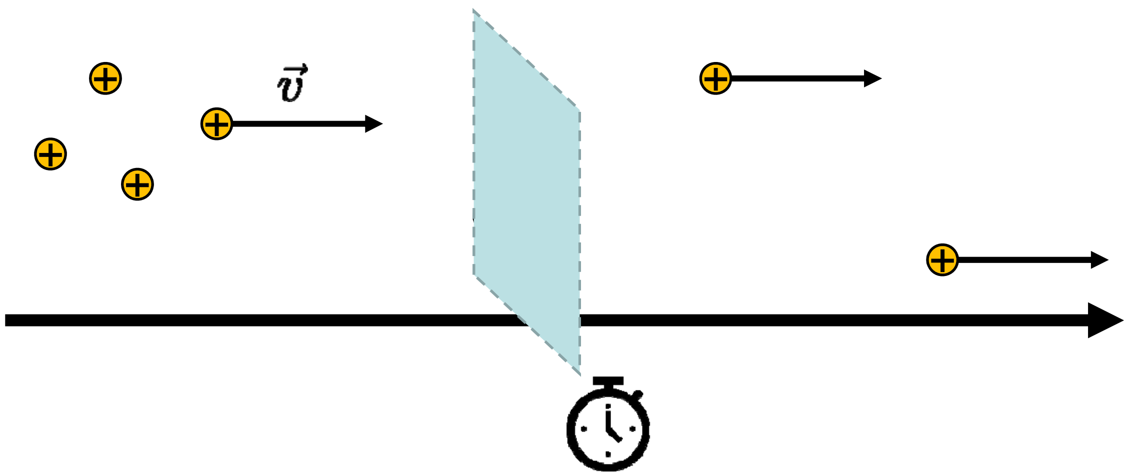
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Ladung, dQ, die sich in der Zeit, dt, durch eine Querschnittsfläche bewegt

Elektrischer Strom

Stromstärke

$$I = \frac{dQ}{dt}$$



Stromdichte, j:

Strom pro Querschnittsfläche

$$j = \frac{I}{A} = \frac{1}{A}\frac{dQ}{dt}$$

Elektrischer Strom

Stromstärke

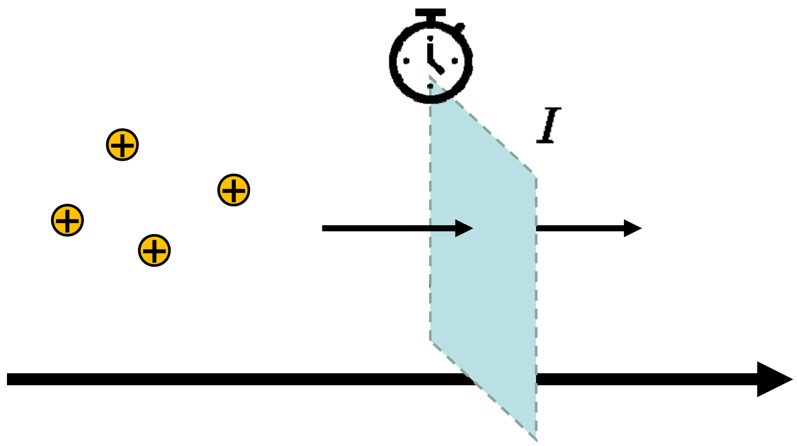
[I] = 1 Ampere (SI - Basiseinheit)

Definition: so, dass mechanische und elektrische Energie in gleichen Einheiten gemessen werden können

Energiezunahme eines Teilchens mit Ladung e beim durchlaufen der Potentialdifferenz 1V:

1 Elektronenvolt (1 eV) = $1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ J

Elektrischer Strom → Ladung



$$Q = \int_0^{\Delta t} I(t)dt$$

Ladung ergibt sich aus Dauer und Stärke des Stromflusses (Fläche unter der I(t) Kurve)

bei konstantem Strom:

$$Q = I\Delta t$$

Einheit der Ladung in SI Basiseinheiten:

$$[Q] = 1 \text{ Coulomb} = 1\ C = 1\ As$$

Magnetostatik

$$I$$

Biot-Savart'sches Gesetz **Ampèresches Gesetz**

$$\vec{B}$$

Magnetostatik

$$I$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{i})}{|\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{i}|^3}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (4.171)$$

$$\vec{B}$$

Biot-Savart'sches Gesetz

Ampèresches Gesetz

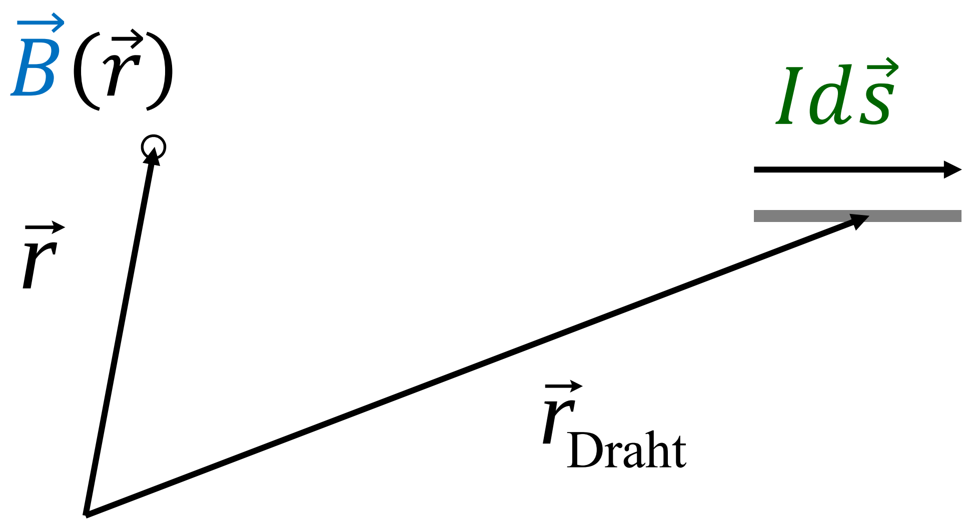
kleines Leiterstück $I \Rightarrow \vec{B}$

Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}_{\text{Draht}})}{|\vec{r} - \vec{r}_{\text{Draht}}|^3} \quad [\mathrm{T}]$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$$

Permeabilität



$d\vec{s}$

zeigt in Richtung des Stroms

Nikola Tesla

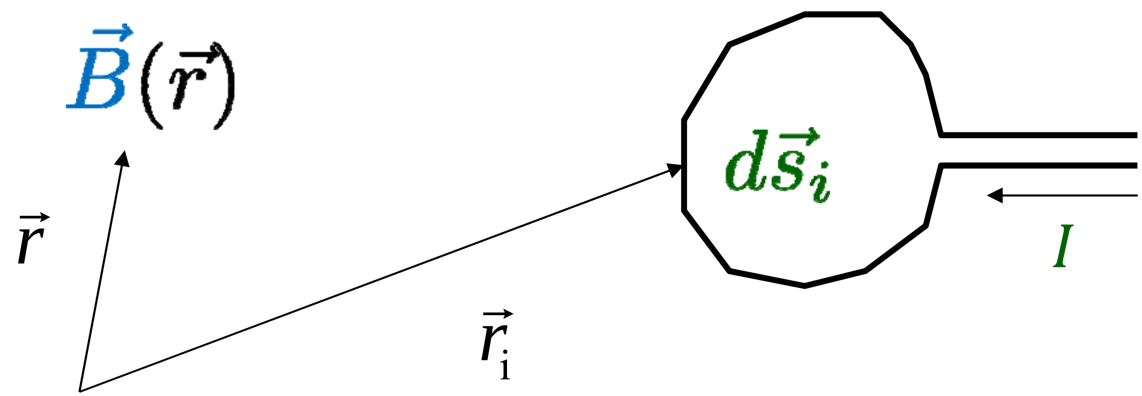
1875 - 1878 Student der TU Graz

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{As}^2}$$

Magnetostatik

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Biot-Savart-Gesetz



Magnetostatik: Strom I an allen Positionen im Draht gleich

Biot-Savart'sches Gesetz

Das magnetische Feld, welches von einem durch einen Draht fließenden elektrischen Strom I hervorgerufen wird, kann bestimmt werden, indem der Strompfad in kurze Segmente geteilt wird und Beiträge aller Segmente aufsummiert werden. Der Beitrag zum magnetischen Feld an der Position $\vec{r}$ hervorgerufen durch ein kurzes Längensegment $d\vec{s}$ an $\vec{r}_{wire}$ ist:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}_{wire})}{|\vec{r} - \vec{r}_{wire}|^3} \text{ [T].}$$

Dabei zeigt $d\vec{s}$ zeigt in die Richtung des Stromflusses. Die Konstante $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m/A ist die magnetische Feldkonstante.

Die Lage und Form des Drahtes kann mit einer parametrischen Gleichung unter Verwendung eines Parameters s, der die Distanz entlang des Drahtes mißt, festgelegt werden. Beispielsweise wird ein gerader Draht von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ beschrieben durch:

$$\vec{r}_{wire} = (r_{1x} + s(r_{2x} - r_{1x}))\hat{x} + (r_{1y} + s(r_{2y} - r_{1y}))\hat{y} + (r_{1z} + s(r_{2z} - r_{1z}))\hat{z} \quad \text{mit } s = [0, 1].$$

Für eine Drahtschleife des Radiuses R in der x-y Ebene an $z = 0$:

$$\vec{r}_{wire} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + 0\hat{z} \quad \text{mit } s = [0, 1].$$

Für eine Drahtwendel mit 10 Windungen

$$\vec{r}_{wire} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + \frac{s}{n}\hat{z} \quad \text{mit } s = [0, 10],$$

wobei n die Anzahl der Windungen per Meter auf der Wendel ist. Das folgende Formular kann benutzt werden, um das magnetische Feld an der Position $\vec{r}$ zu berechnen.

Die Position, an der $\vec{B}$ berechnet wird:

$\vec{r} =$ [0] $\hat{x} +$ [0] $\hat{y} +$ [0.005] $\hat{z}$ [m].

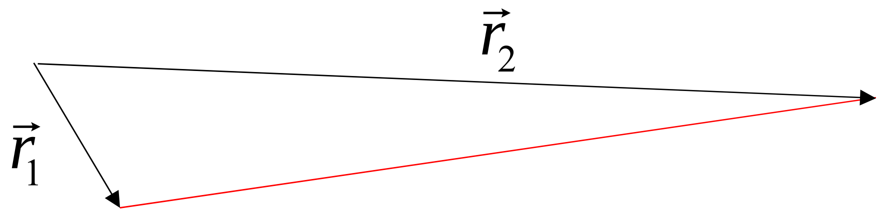
Die parametrischen Gleichungen zur Beschreibung des Drahtes:

$\vec{r}_{wire} =$ [0.1*cos(2*pi*s)] $\hat{x} +$ [0.1*sin(2*pi*s)] $\hat{y} +$ [s/1000] $\hat{z}$ [m].

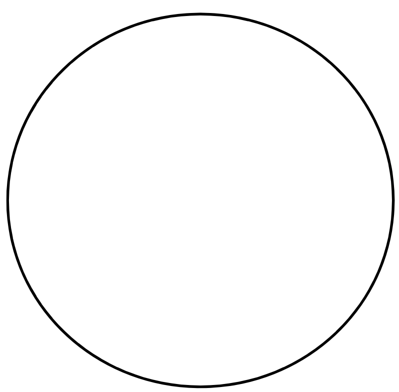
s ist definiert von $s =$ [0] bis $s =$ [10] in [3000] Segmenten.

Der Strom: $I =$ [10] [A].

Parameterdarstellung



$$\vec{r} = \left(r_{1x} + (r_{2x} - r_{1x})s\right)\hat{x} + \left(r_{1y} + (r_{2y} - r_{1y})s\right)\hat{y} + \left(r_{1z} + (r_{2z} - r_{1z})s\right)\hat{z} \qquad s = [0,1]$$



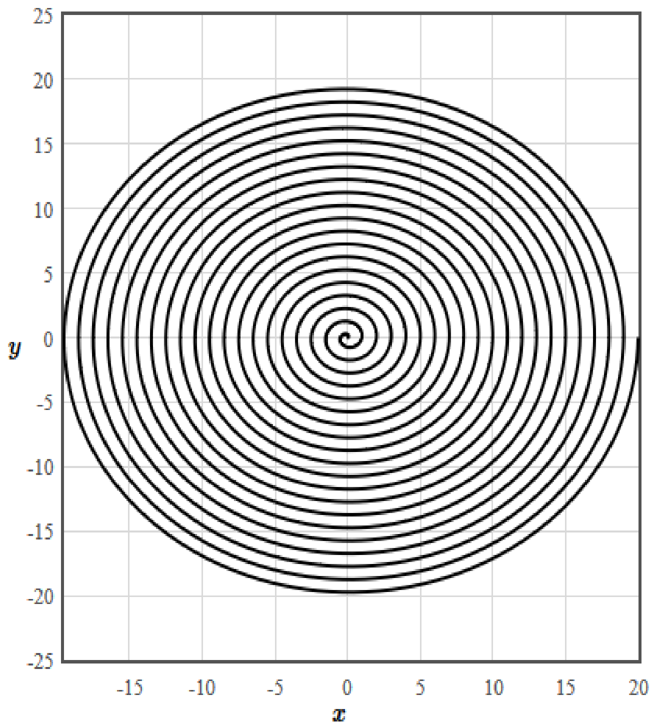
$$\vec{r} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + 0\hat{z} \qquad s = [0,1]$$

Parameterdarstellung

$$\vec{r} = R\cos(2\pi s)\hat{x} + R\sin(2\pi s)\hat{y} + \frac{s}{n}\hat{z}$$

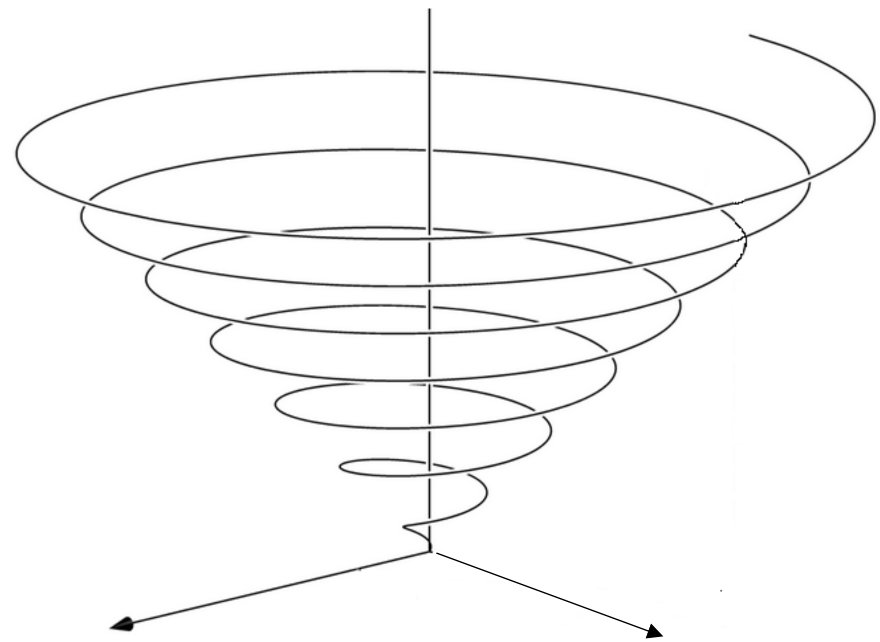
$$s = [0,10]$$

Parameterdarstellung



$$\vec{r} = s\cos(2\pi s)\hat{x} + s\sin(2\pi s)\hat{y} + 0\hat{z}$$

$$s = [0, 20]$$



$$\vec{r} = s\cos(2\pi s)\hat{x} + s\sin(2\pi s)\hat{y} + \frac{s}{n}\hat{z}$$

$$s = [0, 10]$$

Fähigkeiten

Parametrisierung

Sie sollten es beherrschen Parameterdarstellungen zu benützen um Kurven darzustellen. Beispielsweise beschreibt $x = \cos(s)$, $y = \sin(s)$, $s = [0, \pi]$ einen halben Kreis und $x = 2\cos(s)$, $y = 3\sin(s)$, $s = [0, 2\pi]$ eine Ellipse. s ist in diesem Fall der Parameter.

Apps: Elektrisches Feld einer gleichmäßig geladenen gekrümmten Linie, Gesetz von Biot-Savart.

Magnetostatik

$$I$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{i})}{|\vec{r} - \vec{r}_\mathrm{i}|^3}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (4.171)$$

$$\vec{B}$$

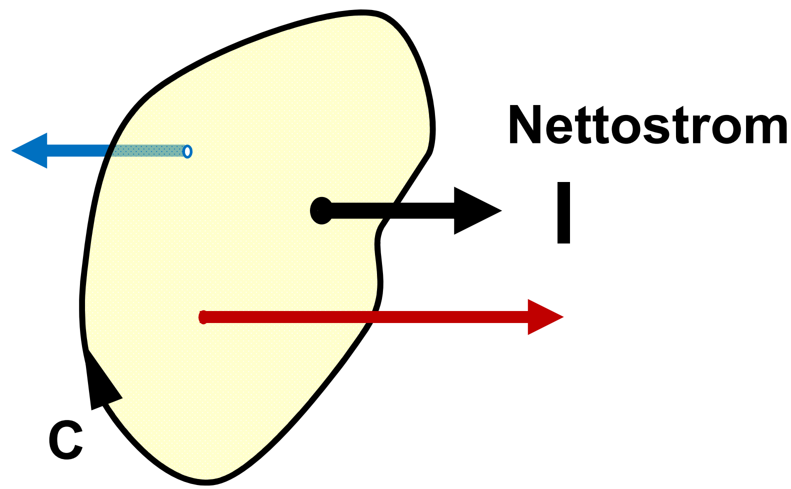
Biot-Savart'sches Gesetz

Ampèresches Gesetz

Ampèresches Gesetz $\vec{B} \Leftrightarrow I$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (4.171)$$

Linienintegral

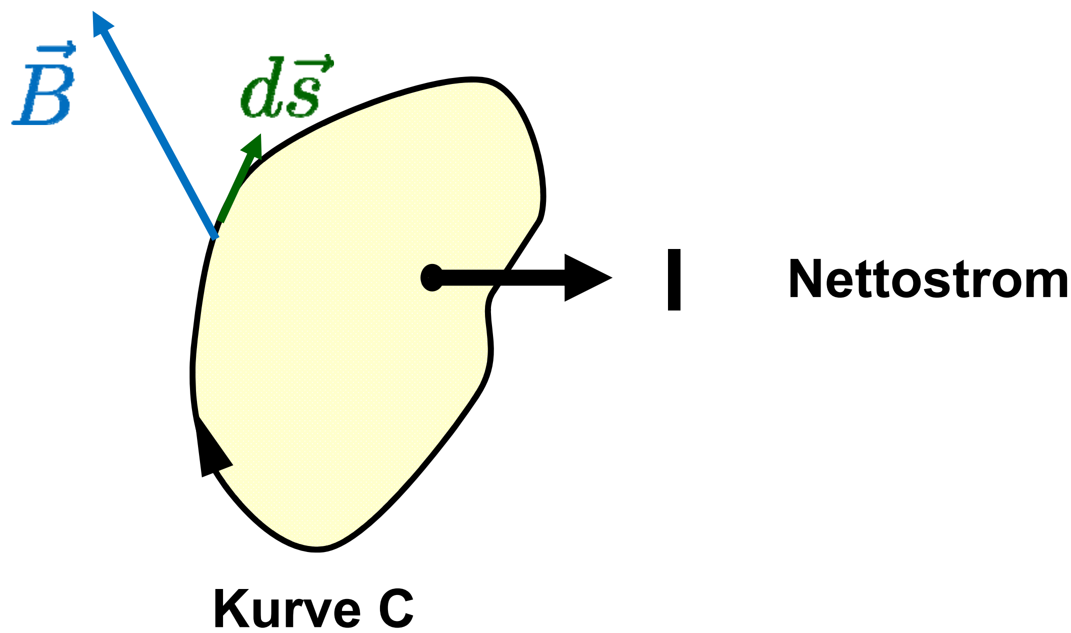


durch Kurve C eingeschlossene Fläche

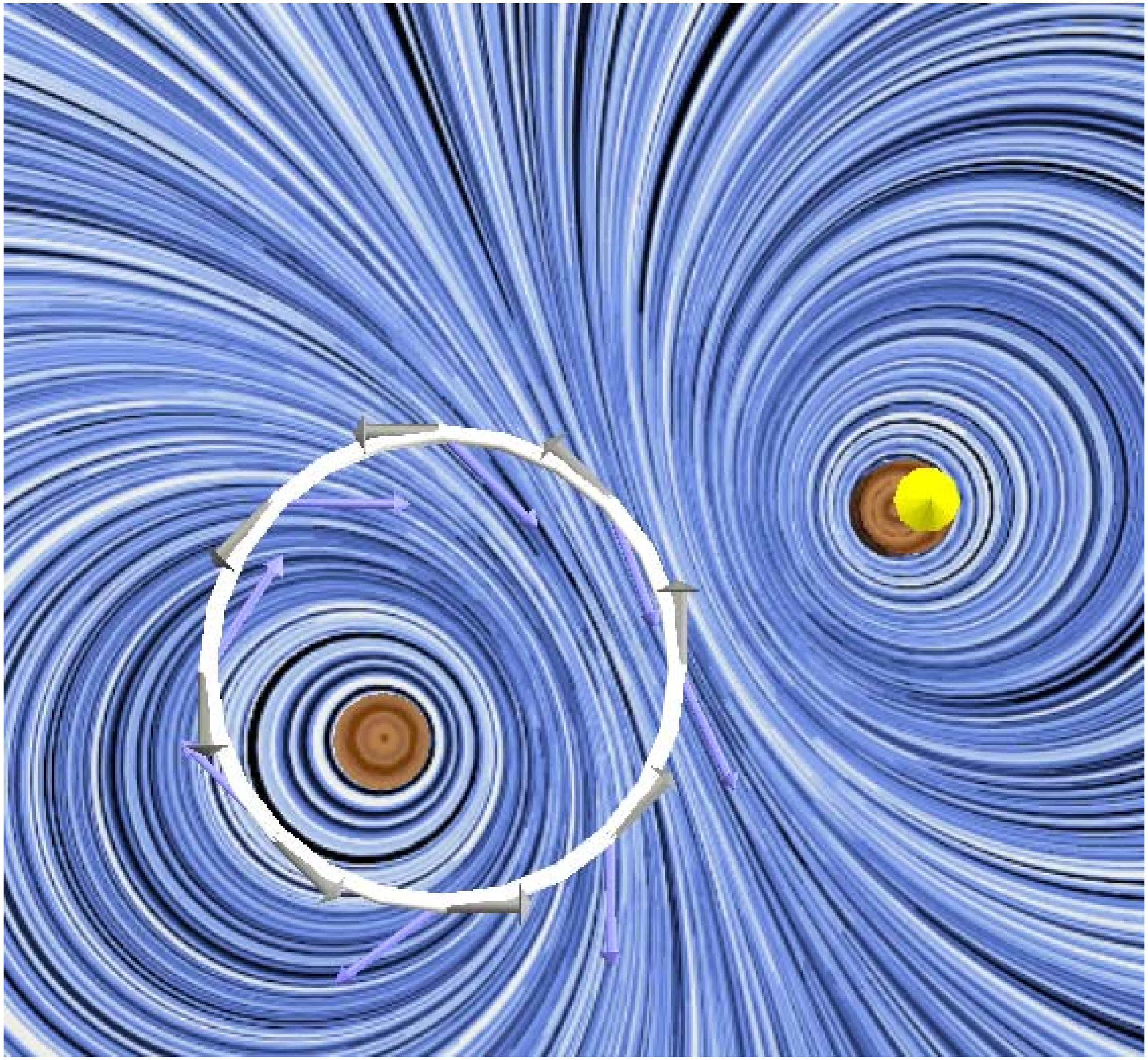
Ampèresches Gesetz $\vec{B} \Leftrightarrow I$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (4.171)$$

Linienintegral

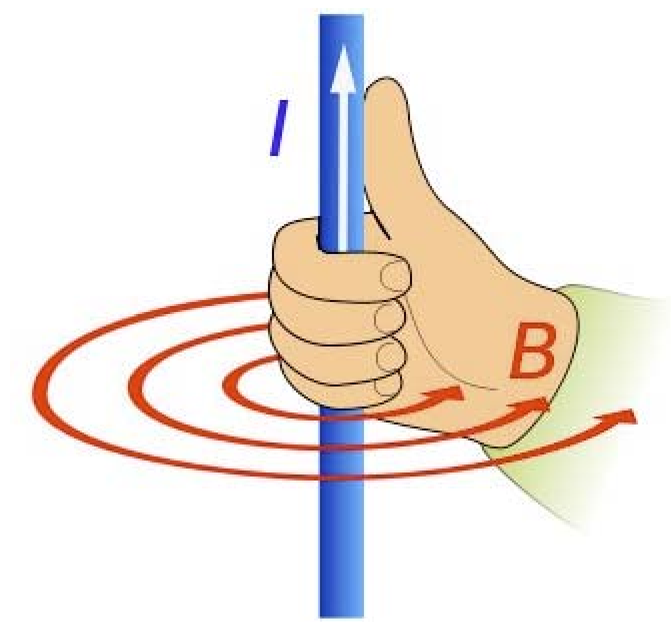


Ampèresches Gesetz



http://public.mitx.mit.edu/gwt-teal/AmperesLaw.html

Rechte-Hand-Regel



Orientierung des Stromes zum magnetischen Feld

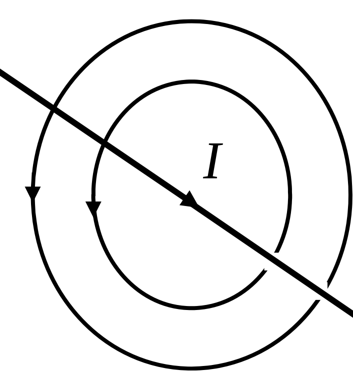
unendlich langer gerader Leiter

Ampèresches Gesetz
(integrale Form)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (4.171)$$

$$2\pi R \left|\vec{B}\right| = \mu_0 I$$

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \qquad (4.173)$$



Rechte-Hand-Regel

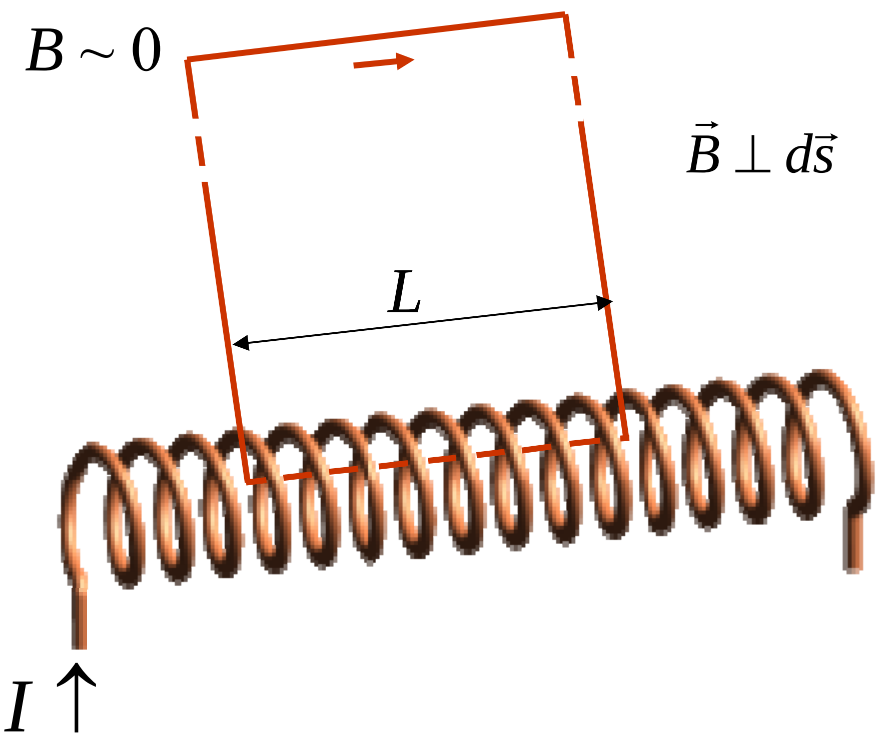
Betrag

Richtung & Orientierung

unendlich lange Zylinderspule

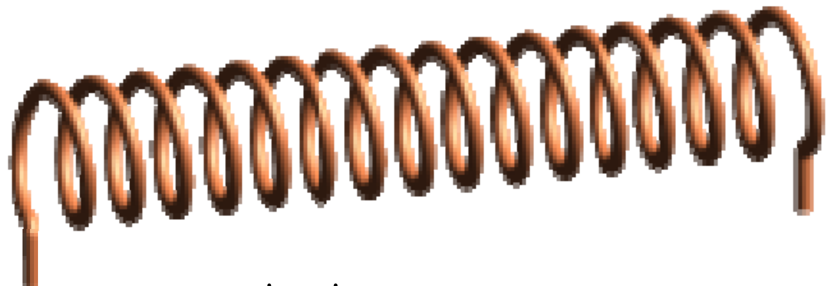
Ampèresches Gesetz
(integrale Form)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad (4.171)$$



$$L\left|\vec{B}\right| = \mu_0 NI$$

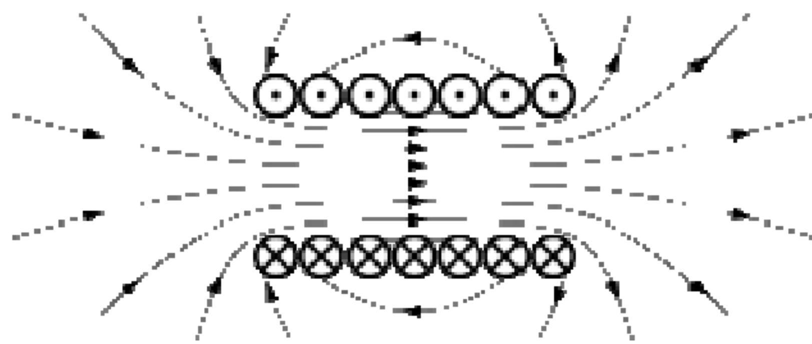
unendlich lange Zylinderspule



$$L\left|\vec{B}\right| = \mu_0 N I$$

$$\left|\vec{B}\right| = \mu_0 n I \quad (4.174)$$

Windungen/Meter



Rechte-Hand-Regel

http://en.wikipedia.org/wiki/Solenoid

Lorentzkraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Ladung

elektrisches Feld

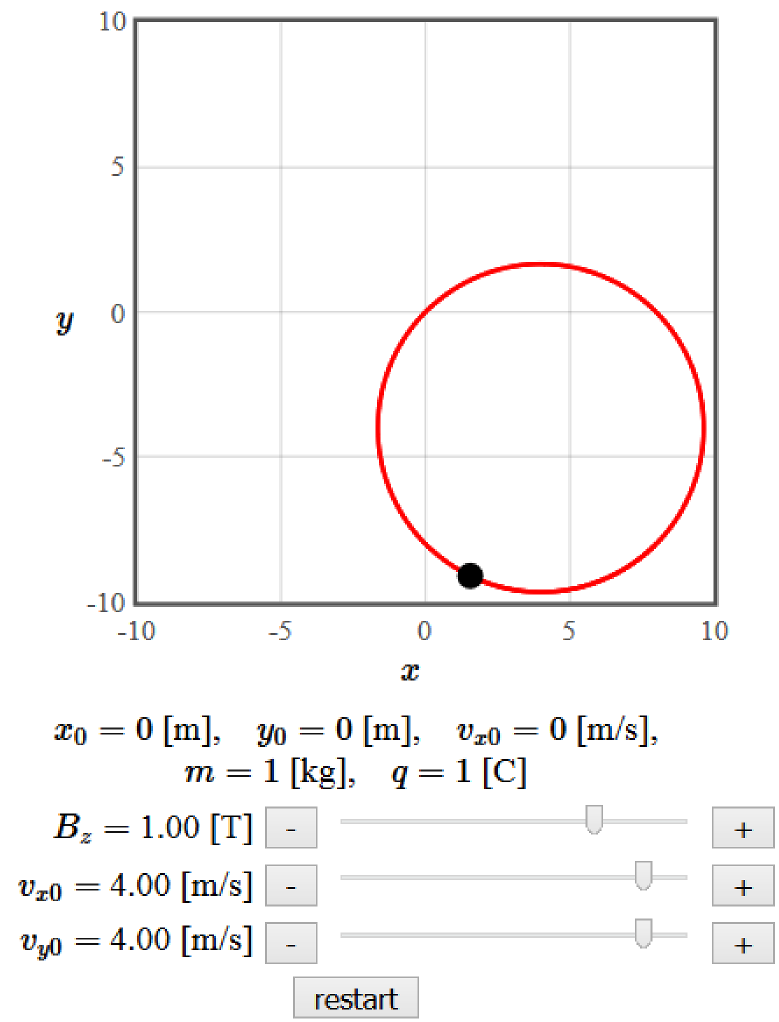
bewegte Ladung und magnetischer Fluss

Lorentzkraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

kein E,

konstantes B ?



Schraubenförmige Bewegung eines geladenen Teilchens in einem konstanten magnetischen Feld

Ein Elektron (Ladung $-e$) gerät in eine Region konstanten magnetischen Feldes mit $B = 5\ \hat{z}$ [T]. Die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons ist

$$\vec{v} = 18736\hat{x} + 12175\hat{y} + 5643\hat{z}\ \text{[m/s]}.$$

Das Elektron beschreibt ein Spirale um die z $-$Achse. Entlang der z $-$Achse gesehen, entspricht der Pfad des Elektrons einem Kreis. Wie groß ist der Radius des Kreises?

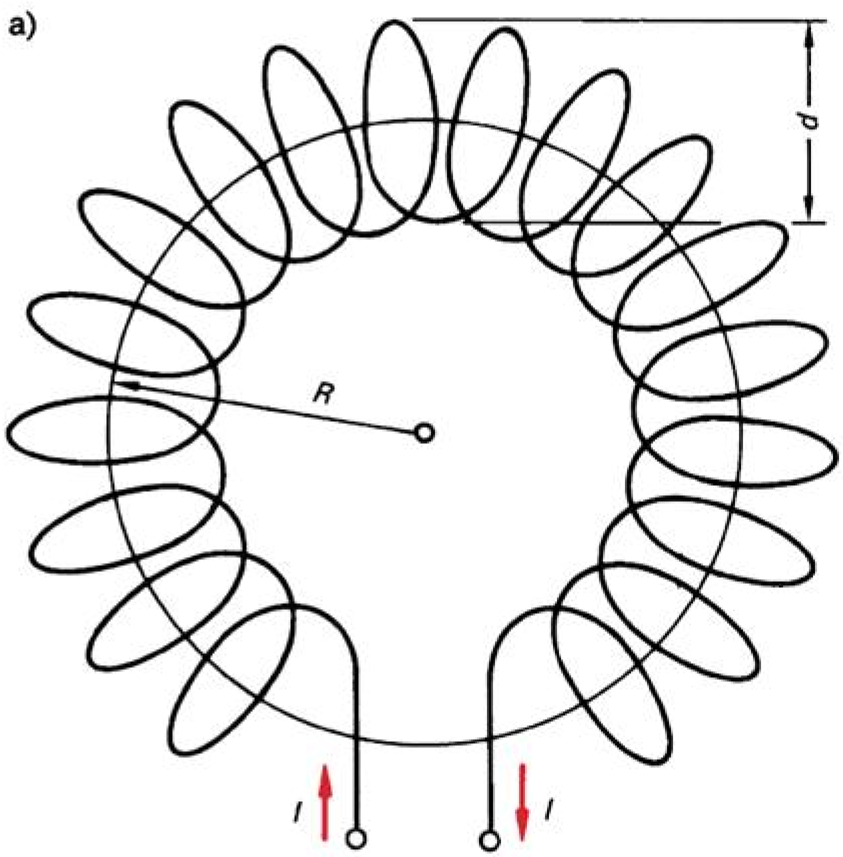
$R =$ ______ [m]

Lösung

$$ev_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{R}$$

Parameterdarstellung

$$\vec{r} = \cos(2\pi s)\left(R + r\cos(20\pi s)\right)\hat{x} + \sin(2\pi s)\left(R + r\cos(20\pi s)\right)\hat{y} + r\sin(20\pi s)\hat{z}$$



$$s = [0,1]$$

Ringspule

ITER