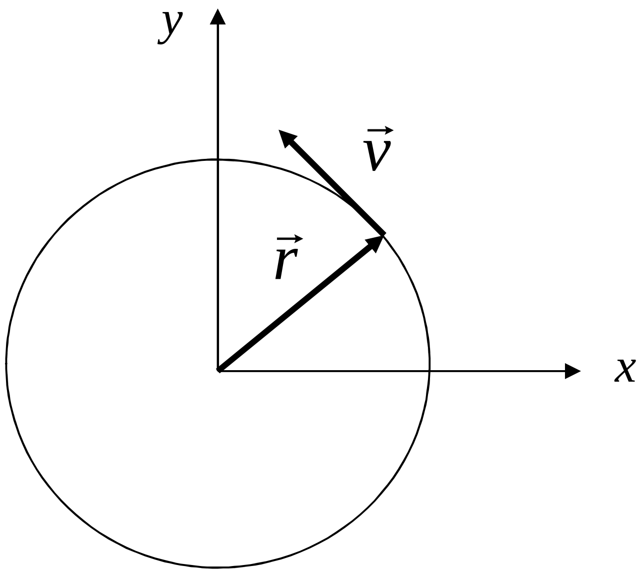
7

Punktmechanik

Arbeit

22. Okt. 2018

Kreisbewegung

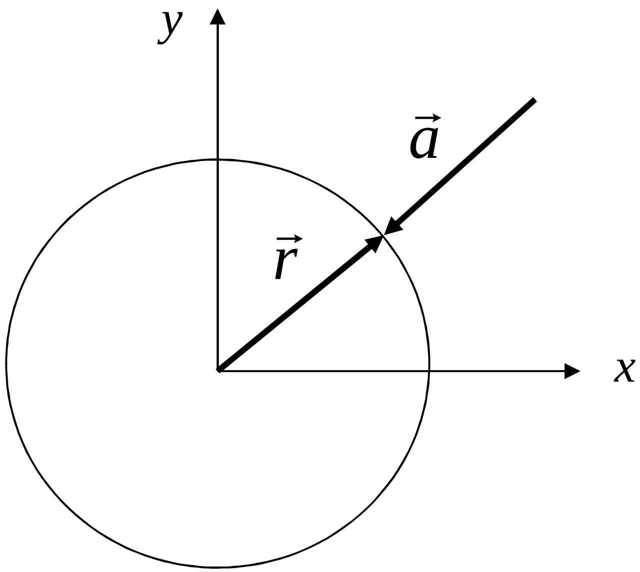


$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

$$|\vec{v}| = |\omega R|$$

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

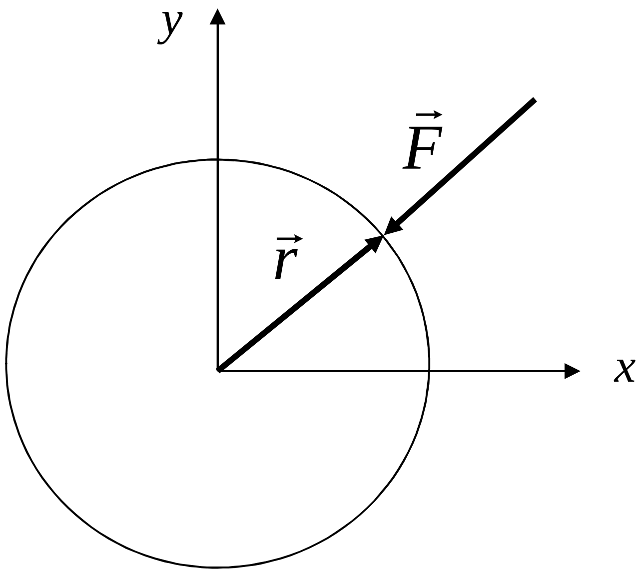
$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

$$|\vec{a}| = |\omega^2 R| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

Zentrifugalbeschleunigung

Kreisbewegung



$$\vec{r} = R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{x} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\,\hat{x} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r}$$

$$\left|\vec{F}\right| = \left|m\omega^2 R\right| = \frac{m\left|\vec{v}\right|^2}{R}$$

Zentrifugalkraft

Fähigkeiten

Differenzialgleichungen

Viele Systeme die sich mit der Zeit verändern, lassen sich als Differenzialgleichungen darstellen. Dies beinhaltet Aktienkurse, Tierpopulationen, Maschinenvibrationen und die Bewegungen eines Teilchens. Dieser Kurs wird sich darauf beschränken die Bewegung von Teilchen in 1, 2 und 3 Dimensionen zu behandeln. Die Kraft eines solchen Teilchens, welches in einer Dimension bewegt ist, lässt sich durch seinen Ort x, seine Geschwindigkeit v_x, und die Zeit t beschreiben. Ist die Kraft eines Teilchens bekannt, lässt sich das Gesetz von Newton als Differenzialgleichung schreiben:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(v_x, x, t).$$

Mit F der Kraft und m der Masse. Dies lässt sich ebenfalls als zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung darstellen,

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \text{und} \quad \frac{dv_x}{dt} = F(x, v_x, t)/m.$$

Problem 4

Zur Zeit $t = 0$ befindet sich ein Ball an der Position $\vec{r} = 0$ und hat die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = 4\hat{x} + 3\hat{y} + 9\hat{z} \text{ [m/s]}.$$

Der Ball hat eine Masse von $m = 0.5$ [kg]. Zwei Kräfte wirken auf den Ball: Schwerkraft $\vec{F}_{grav} = -mg\hat{z}$ [N], und eine Reibungskraft, auf Grund des Windes. Der Wind hat eine zeitabhängige Geschwindigkeit $\vec{v}_{wind} = \exp(-t^2)\hat{y}$ [m/s]. Die Reibungskraft ist $\vec{F}_{drag} = -0.1(\vec{v} - \vec{v}_{wind})$ [N].

Mit $g = 9.81$ [m/s²] der Gravitationsbeschleunigung auf der Erdoberfläche. Welche Differentialgleichung muss gelöst werden, um die Bahnkurve des Balls bestimmen zu können?

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \quad \text{\_\_\_\_\_}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \quad \text{\_\_\_\_\_}$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \quad \text{\_\_\_\_\_}$$

Wo ist der Ball bei $t = 3$ s?

$$\vec{r} = \text{\_\_\_\_\_}\,\hat{x} + \text{\_\_\_\_\_}\,\hat{y} + \text{\_\_\_\_\_}\,\hat{z} \text{ [m]}$$

Arbeit

- ❑ **Unter welchem Umständen spricht man davon, dass Arbeit verrichtet wird?**
- ❑ **Wie hängt die Arbeit von der Kraft ab, ist dabei die Art der Kraft wichtig?**
- ❑ **Wie interpretiert man das Vorzeichen der Arbeit?**

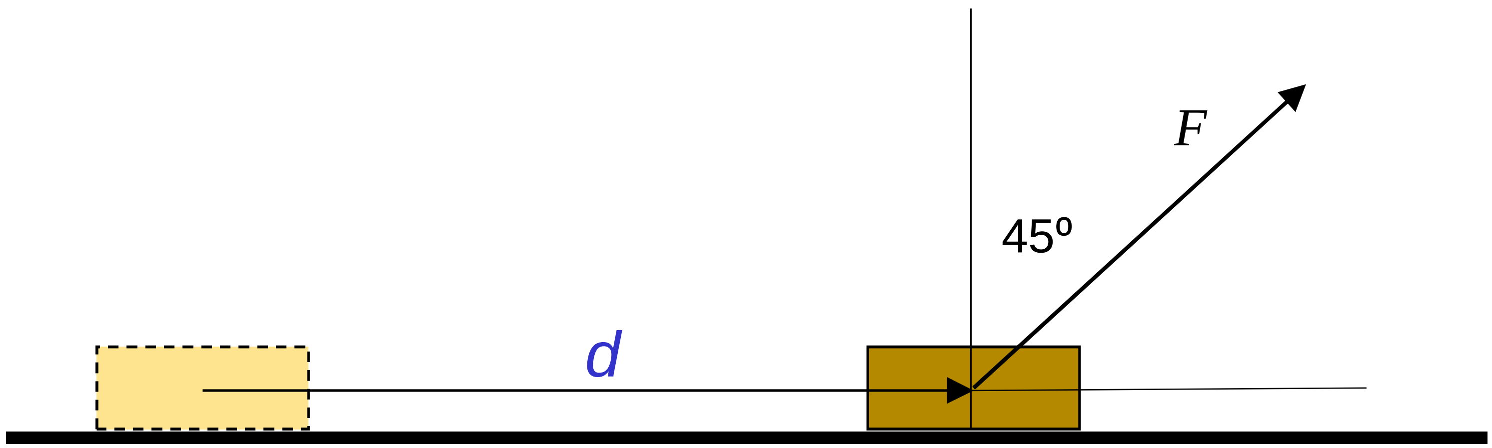
Arbeit

Eine Kraft verrichtet Arbeit, wenn sie durch ihre Einwirkung einen Körper von einem ursprünglichen Ort in die Richtung der Kraft verschiebt.

- **Wirkt eine Kraft auf einen Körper und verschiebt ihn dabei, so wird Arbeit verrichtet.**

- **Die Arbeit ist dem Weg und der in Richtung des Weges gerichteten Kraftkomponente proportional.**

Arbeit = Kraft ·Verschiebungsweg



$$W = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, \Delta\vec{r})\ |\Delta\vec{r}|$$

Kraftkomponente parallel zur Bewegunsrichtung

Arbeit

Arbeit = Kraft ·Verschiebungsweg

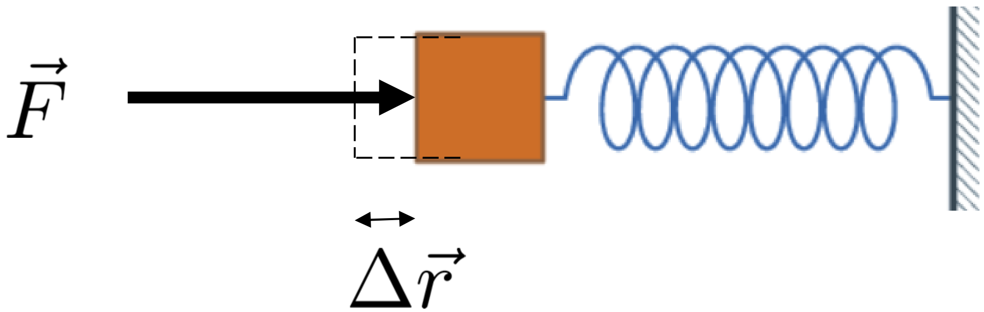
$$\Delta W = F \Delta r$$

Dimension: Masse x Länge^2 / Zeit^2

SI-Einheit: Joule

$$[\mathrm{Nm}] = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}\right]\mathrm{m} = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^2}\right] = \mathrm{J}$$

Arbeit durch Kraft entlang Bewegungsrichtung

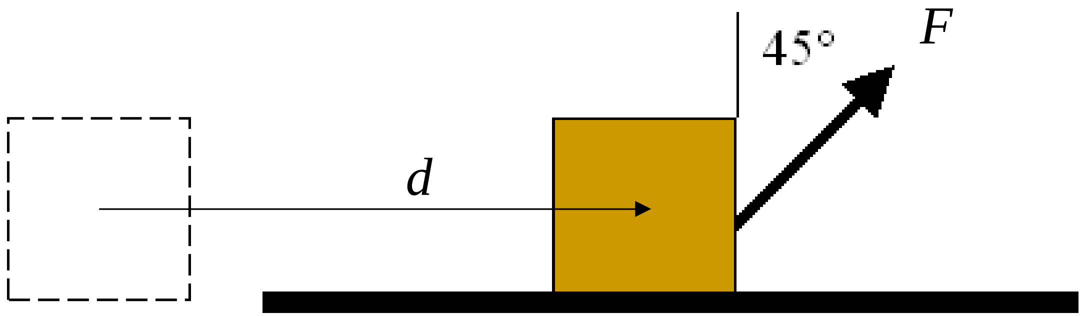


$$\Delta W = F\Delta r$$

Arbeit = Kraft $\cdot$ Verschiebungsweg

Arbeit

Kraftkomponente parallel zur Bewegungsrichtung!

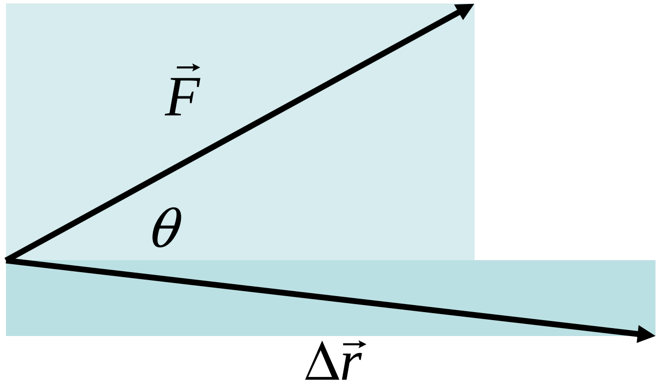


$$W\,?$$

$$W = |\vec{F}|\cos(\vec{F},\Delta\vec{r})|\Delta\vec{r}|$$

Skalarprodukt

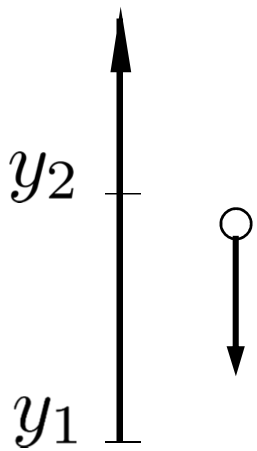
$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos(\vec{F}, \Delta\vec{r}) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$



$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F_x \Delta r_x + F_y \Delta r_y + F_z \Delta r_z$$

Arbeit, die man <u>gegen</u> eine konstante Kraft verrichten muss

Beispiel für ortsunabhängige Kräfte **Hubarbeit**



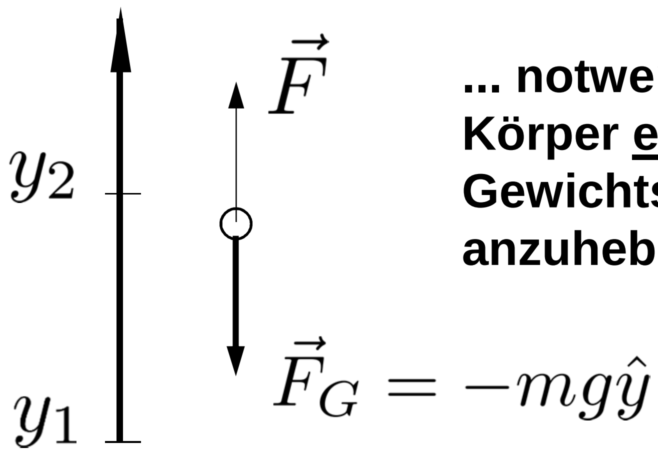
$$\vec{F}_G = -mg\hat{y}$$

$$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = |y_2 - y_1|\hat{y} = |\Delta y|\hat{y}$$

Arbeit, die man <u>gegen</u> eine konstante Kraft verrichten muss

Beispiel für ortsunabhängige Kräfte

Hubarbeit



... notwendig um Körper <u>entgegen</u> der Gewichtskraft anzuheben

$$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = |y_2 - y_1|\hat{y} = |\Delta y|\hat{y}$$

$$W_{12} = \vec{F}\vec{s} = -\vec{F}_G\vec{s} = -\,mg|\Delta y|(-\hat{y}) \cdot \hat{y} = mg|\Delta y|$$

Arbeit ist positiv, wenn die <u>Verschiebung entgegengesetzt</u> zur <u>Kraftkomponente</u> orientiert ist

Verrichtete Arbeit durch konstante Kraft

Ein Objekt bewegt sich geradlinig von Position

$$\vec{r}_1 = 9\hat{x} - 6\hat{y} + 2\hat{z} \quad [\mathrm{m}]$$

zu Position

$$\vec{r}_2 = 6\hat{x} - 5\hat{y} + 2\hat{z} \quad [\mathrm{m}],$$

während eine konstante Kraft

$$\vec{F} = 3\hat{x} + 7\hat{y} + 5\hat{z} \quad [\mathrm{N}].$$

auf das Objekt wirkt. Welche Arbeit wird durch diese Kraft verrichtet (die Arbeit kann negativ sein) ?

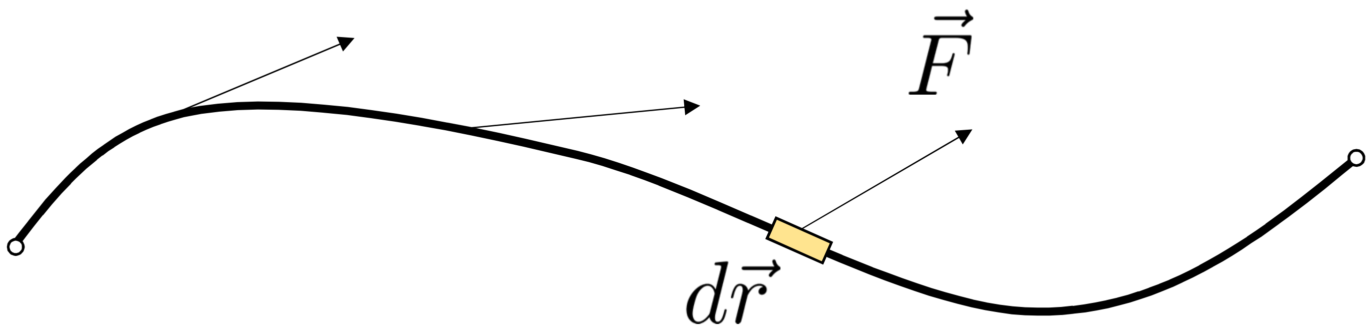
$W =$ ______ [J] Lösung

W = 3(6-9)+7(-5+6)+5(2-2) = -2 [J].

Arbeit bei nichtkonstanter Kraft?

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Zerlegung des Verschiebungsweges in infinitesimale Wegstücke



$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dW = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Arbeit

$$\boxed{W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$$

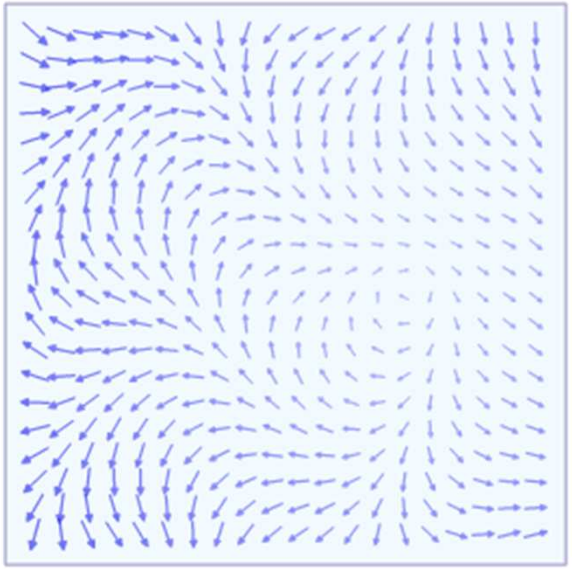
$$d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\boxed{W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz}$$

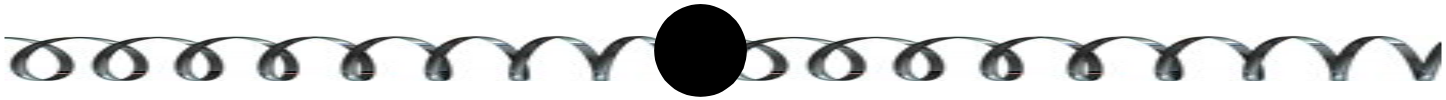
Arbeit

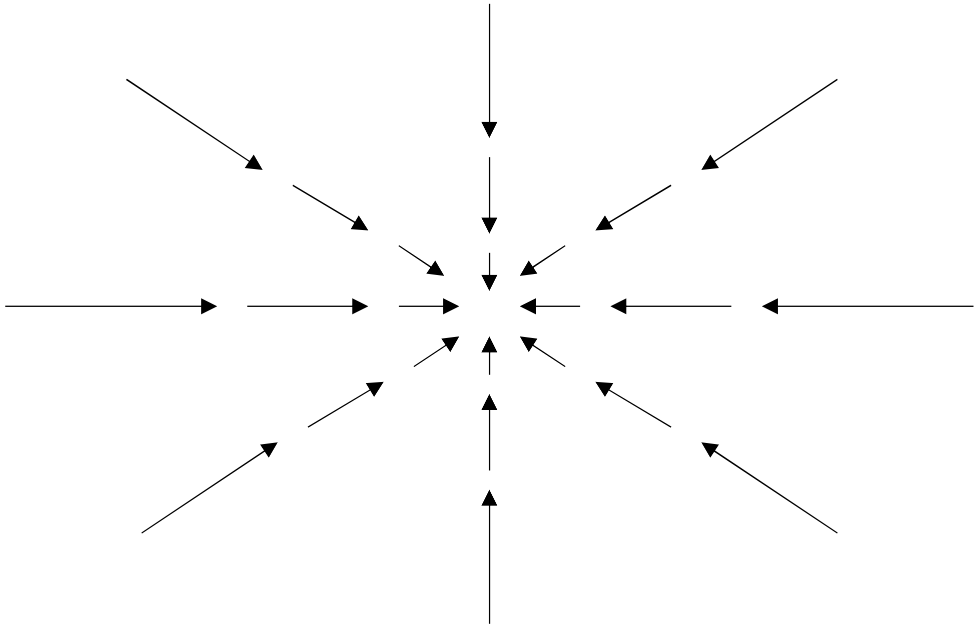
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



http://en.wikipedia.org/wiki/Line_integral

Kraftfeld





$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (1)$$

$\vec{F}(\vec{r}),\ \vec{r}$ bekannt

$$W = \int F_x(x)dx + \int F_y(y)dy + \int F_z(z)dz$$

Nichtlineare Feder

Die Kraft, die für das Zusammendrücken einer nichtlinearen Feder um die Strecke x benötigt wird, ist:

$$\vec{F} = 823x^{1.5}\hat{x} \quad [\mathrm{N}],$$

wobei x in Metern angegeben ist. Wieviel Arbeit wird verrichtet, wenn eine ursprünglich entspannte Feder um 7 Zentimeter zusammengedrückt wird?

$W =$ ☐ [J] Lösung

---

fbr.io/join/zpegi