4. Punktmechnik

12 Okt. 2018

Punktmechanik

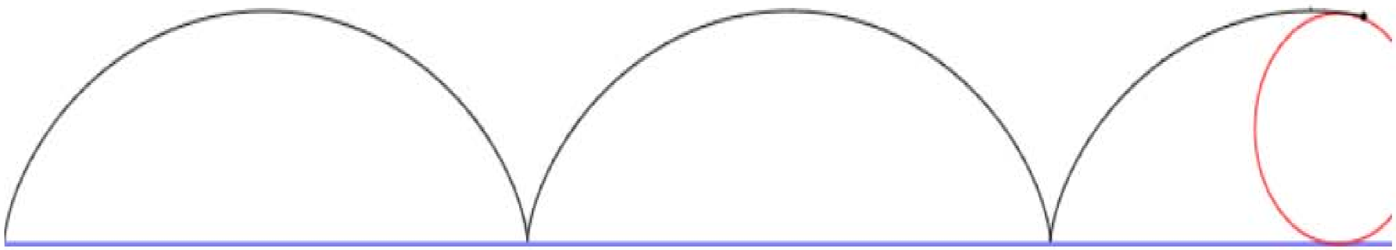
$$\vec{r} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{F}$$

Punktmechanik

$\vec{r}$ $\qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ $\qquad \vec{F} = m\vec{a}$

Zykloid (Radlaufkurve)

Ein kleiner Stein der Masse $m = 68$ g steckt in einem Autoreifen. Der Radius des Reifens ist $R = 0.3$ m. Der Stein folgt einem Zykloid während der Reifen rollt. Der Reifen rollt mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = 6$ m/s.



Der Positionsvektor der Steines ist:

$$\vec{r}(t) = R\left(\frac{vt}{R} - \sin(\frac{vt}{R})\right)\hat{x} + R\left(1 - \cos(\frac{vt}{R})\right)\hat{y}\ [\mathrm{m}].$$

Wie groß ist die Minimalgeschwindigkeit des Steines?

$$|\vec{v}_{min}| = \qquad [\mathrm{m/s}]$$

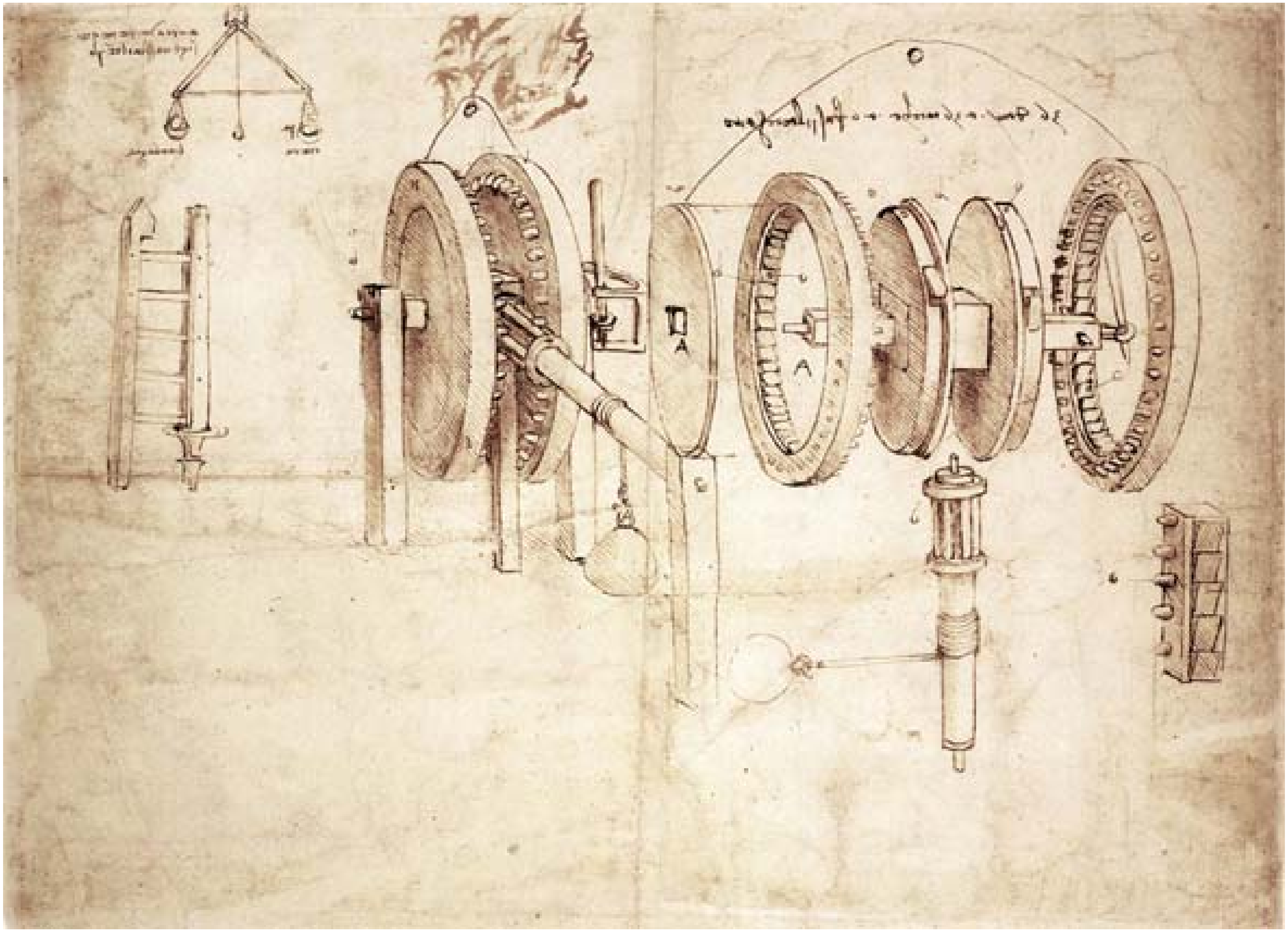
Wie groß ist die Maximalgeschwindigkeit des Steines?

$$|\vec{v}_{max}| = \qquad [\mathrm{m/s}]$$

Wie groß ist die Kraft auf den Stein zur Zeit $t = 8$ Sekunden?

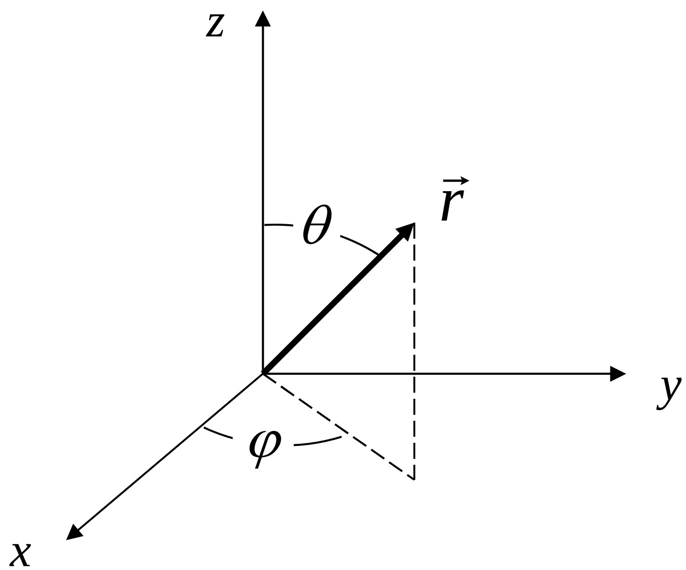
$$\vec{F} = \qquad \hat{x} + \qquad \hat{y}\ [\mathrm{N}].$$

Bewegung ⟺ Kraft



Corioliskraft

$$\vec{r}\left(t\right) = R\sin\left(\Omega t\right)\cos\left(\omega t\right)\hat{x} + R\sin\left(\Omega t\right)\sin\left(\omega t\right)\hat{y} + R\cos\left(\Omega t\right)\hat{z}$$



$$\theta = \Omega t$$

$$\varphi = \omega t$$

$$\vec{F}\,?$$

Corioliskraft

$$\vec{r}(t) = R\sin(\Omega t)\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\sin(\Omega t)\sin(\omega t)\,\hat{y} + R\cos(\Omega t)\,\hat{z}$$

$$\vec{v}(t) = \big(\Omega R\cos(\Omega t)\cos(\omega t) - \omega R\sin(\Omega t)\sin(\omega t)\big)\,\hat{x}$$
$$+\big(\Omega R\cos(\Omega t)\sin(\omega t) + \omega R\sin(\Omega t)\cos(\omega t)\big)\,\hat{y} - \Omega R\sin(\Omega t)\,\hat{z}$$

$$\vec{F}(t) = mR[(-\Omega^2\sin(\Omega t)\cos(\omega t) - \Omega\omega\cos(\Omega t)\sin(\omega t)$$
$$-\omega\Omega\cos(\Omega t)\sin(\omega t) - \omega^2\sin(\Omega t)\cos(\omega t))\hat{x}$$
$$+(-\Omega^2\sin(\Omega t)\sin(\omega t) + \Omega\omega\cos(\Omega t)\cos(\omega t) + \Omega\omega\cos(\Omega t)\cos(\omega t)$$
$$-\omega^2\sin(\Omega t)\sin(\omega t))\hat{y} - \Omega^2\cos(\Omega t)\,\hat{z}]$$

Müssen wir die Coriolis-Kraft für die Prüfung wissen?

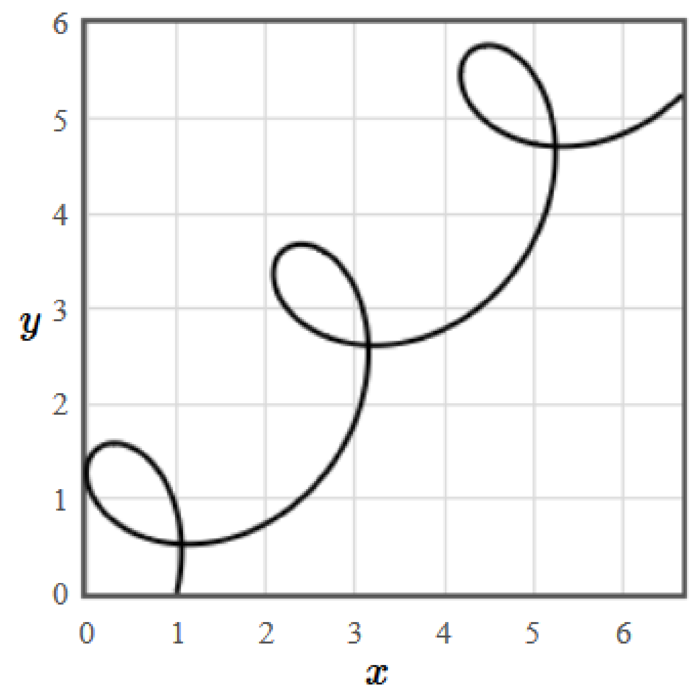
Problem 2

Die Bahnkurve eines Teilchens der Masse $m = 33$ g ist,

$$\vec{r}(t) = \big(t + \cos(3t)\big)\,\hat{x} + \big(t + \sin(3t)\big)\,\hat{y} \quad [\mathrm{m}].$$

immer Radiant

Dabei ist t die Zeit in Sekunden.



Welche Kraft wirkt auf das Teilchen zur Zeit $t = 1$ s?

$$\vec{F} = \boxed{}\,\hat{x} + \boxed{}\,\hat{y} + \boxed{}\,\hat{z}\ [\mathrm{N}]$$

Position → Kraft (numerisch)

Ein auf einer geraden Straße fahrendes Auto hat ein GPS-Gerät installiert, welches die Position des Autos speichert. Die Masse des Autos ist 1081 kg. Welche Kraft wirkt auf das Auto zur Zeit t =20 s?

Differenzieren Sie mittels der APP Numerische Integration.

t [s]	x [m]
0.00	14.000000
0.500	28.189951
1.00	42.548471
1.50	57.052331
2.00	71.676582
2.50	86.394701
3.00	101.17875
3.50	115.99954
4.00	130.82686
4.50	145.62964
5.00	160.37619

Punkt ↔ Komma

Lösung

Lehrplan
Bücher
Testfragen

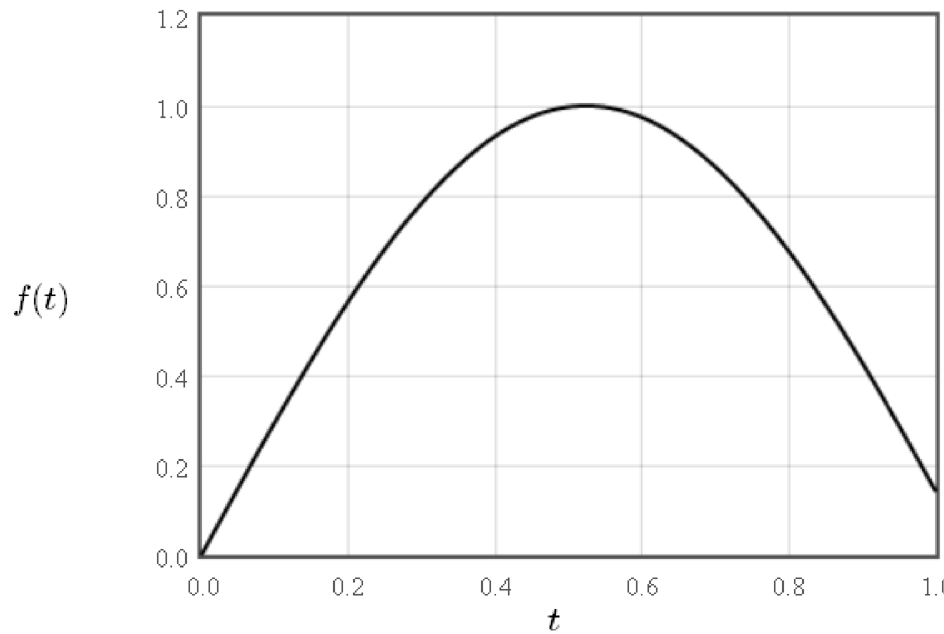
Numerische Integration and Differentiation

$f(t) =$ sin(3*t) ?

Fill table from $t_1 = 0$ to $t_2 = 1$.

t	$f(t)$
0.02000	0.05996
0.02333	0.06994
0.02667	0.07991
0.03000	0.08988
0.03333	0.09983
0.03667	0.1098
0.04000	0.1197
0.04333	0.1296
0.04667	0.1395
0.05000	0.1494
0.05333	0.1593

calculate from table



Die 1. Ableitung

Die Ableitung von $f(t)$ wird berechnet aus

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Differentialgleichungen

$$ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(x, v_x, t\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x\left(x, v_x, t\right)}{m}$$

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen

Anfangsbedingungen: $x(t=0)=x_0$ $\quad$ $v_x(t=0)=v_{x0}$

$$\frac{dx}{dt}=v_x \qquad \frac{dv_x}{dt}=\frac{F_x(x,v_x,t)}{m}$$

$$x(\Delta t)\approx x_0+\frac{dx}{dt}\Delta t \qquad v_x(\Delta t)\approx v_{x0}+\frac{dv_x}{dt}\Delta t$$

Ball werfen ohne Reibung

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} = \text{-9.81}$$

Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 0

$v_x(t_0) =$ 100

$t_0 =$ 0

$\Delta t =$ 0.05

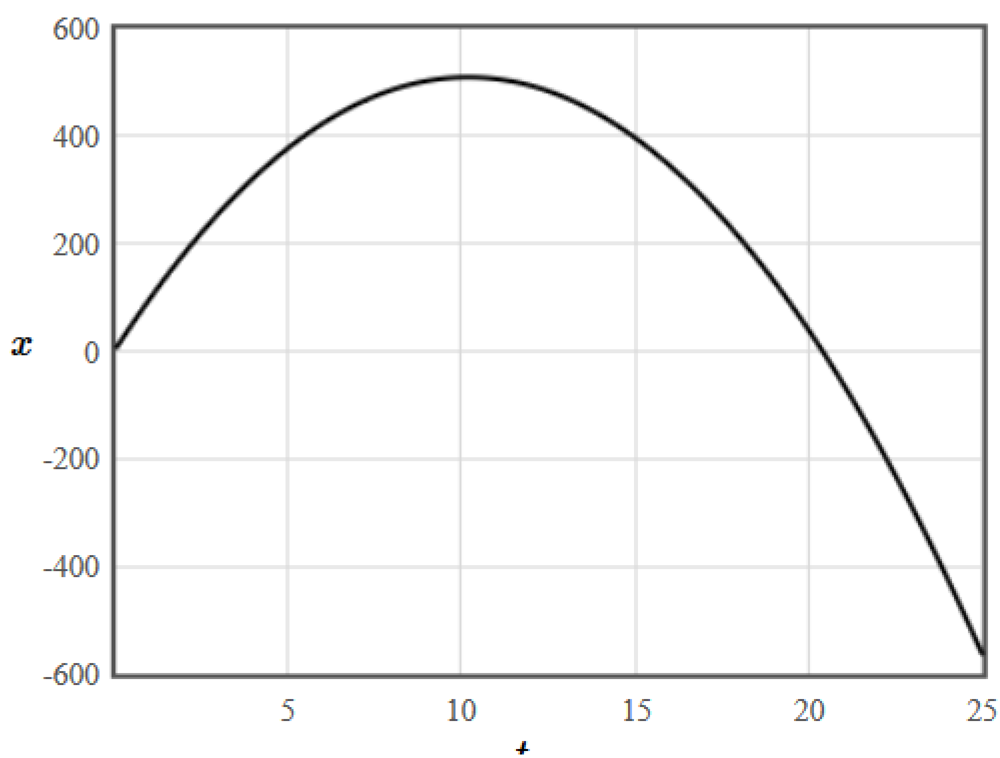
N_{steps} 500

Graphische Darstellung: x vs. t

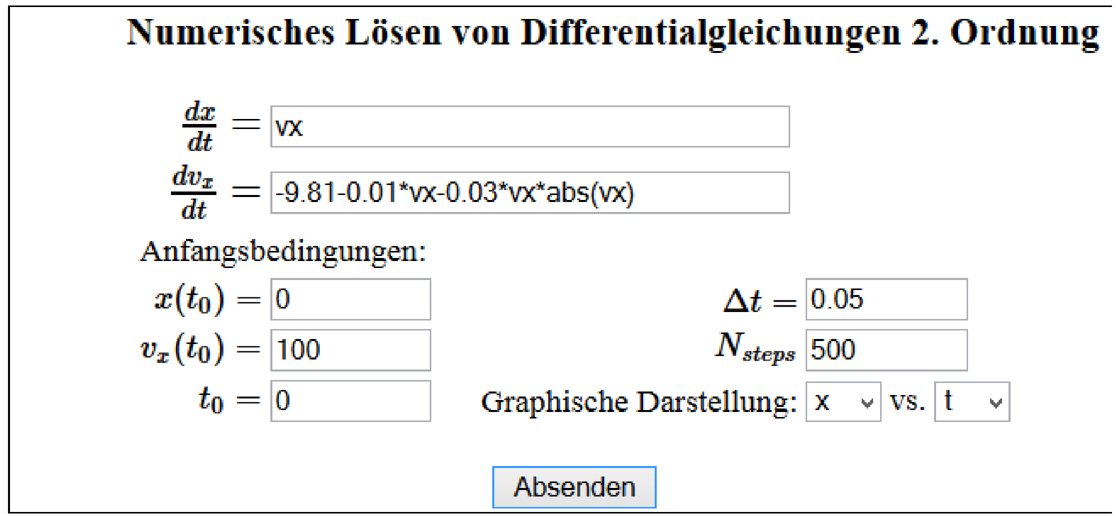
Absenden

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g$$

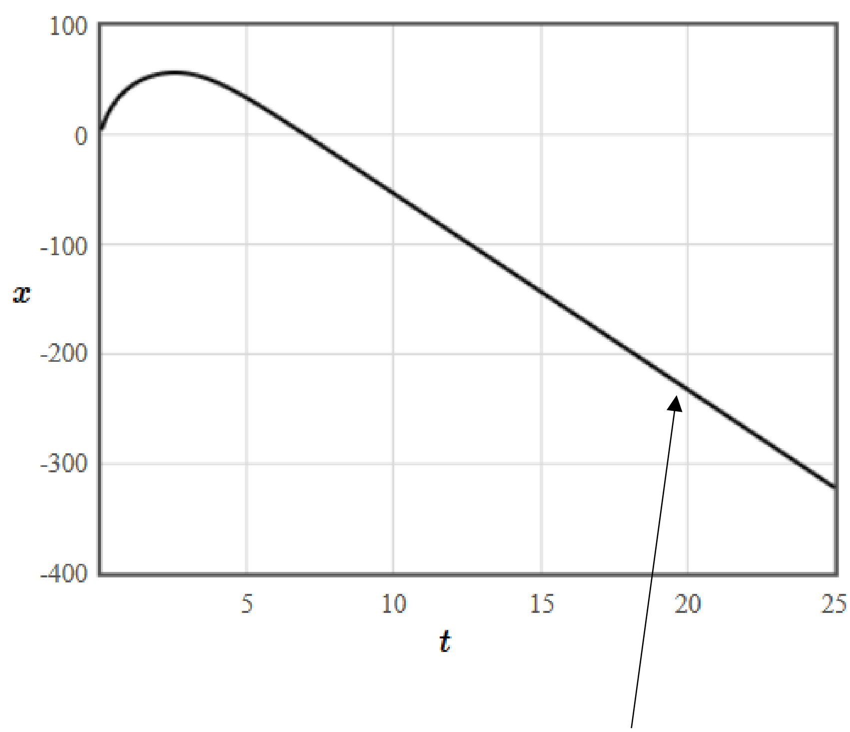


Ball werfen mit Reibung



$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - av_x - bv_x\,|\,v_x\,|$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g - \frac{a}{m}v_x - \frac{b}{m}v_x\,|\,v_x\,|$$



Endgeschwindigkeit

Massa - Feder

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}x$$

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$\frac{dx}{dt} =$ vx

$\frac{dv_x}{dt} =$ -3*x

Anfangsbedingungen:

$x(t_0) =$ 0

$v_x(t_0) =$ 1

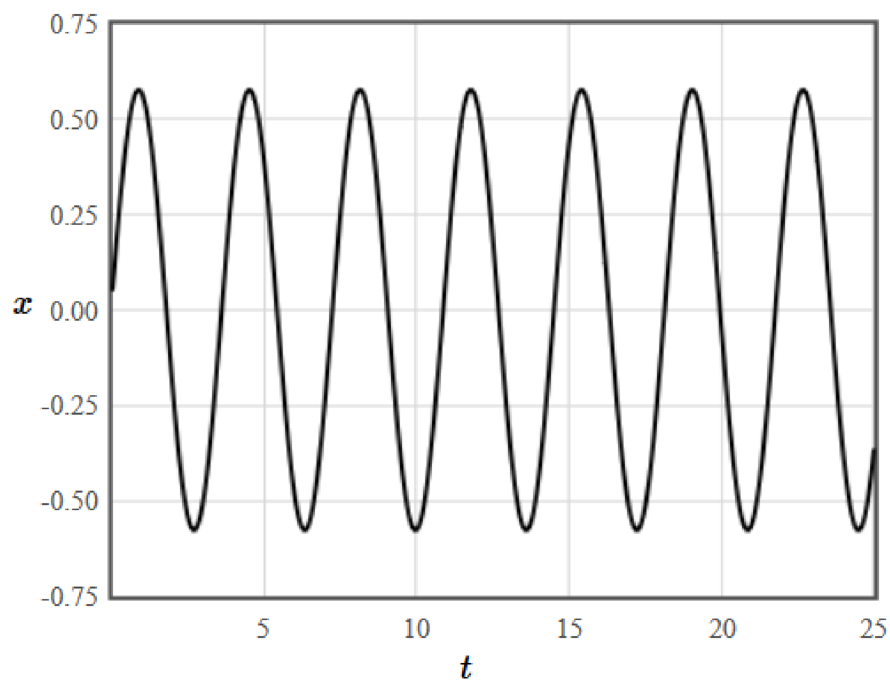
$t_0 =$ 0

$\Delta t =$ 0.05

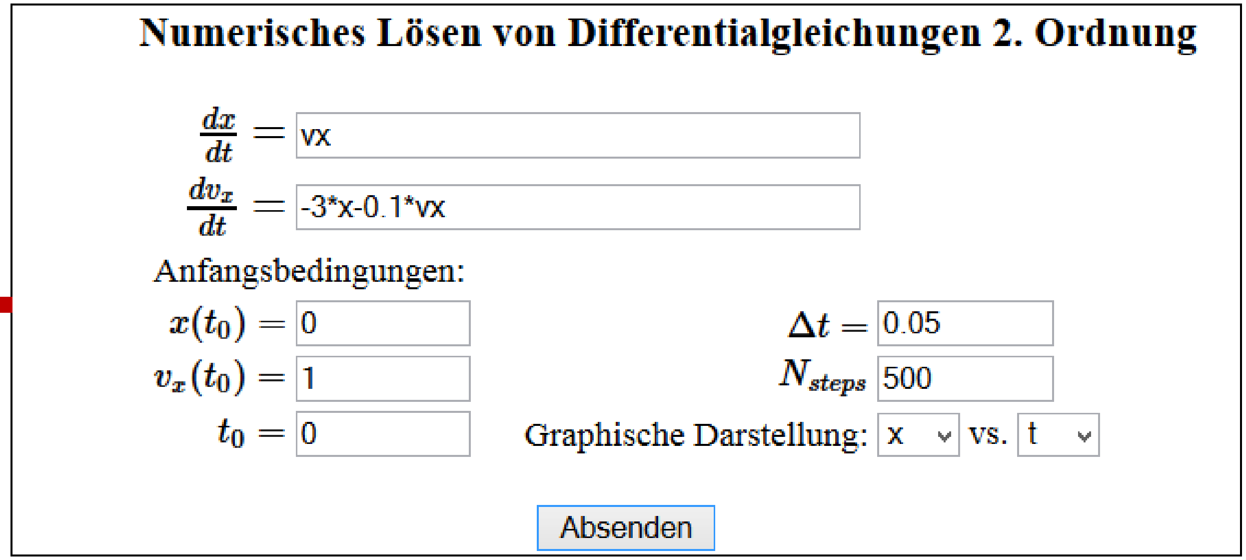
N_{steps} 500

Graphische Darstellung: x vs. t

Absenden

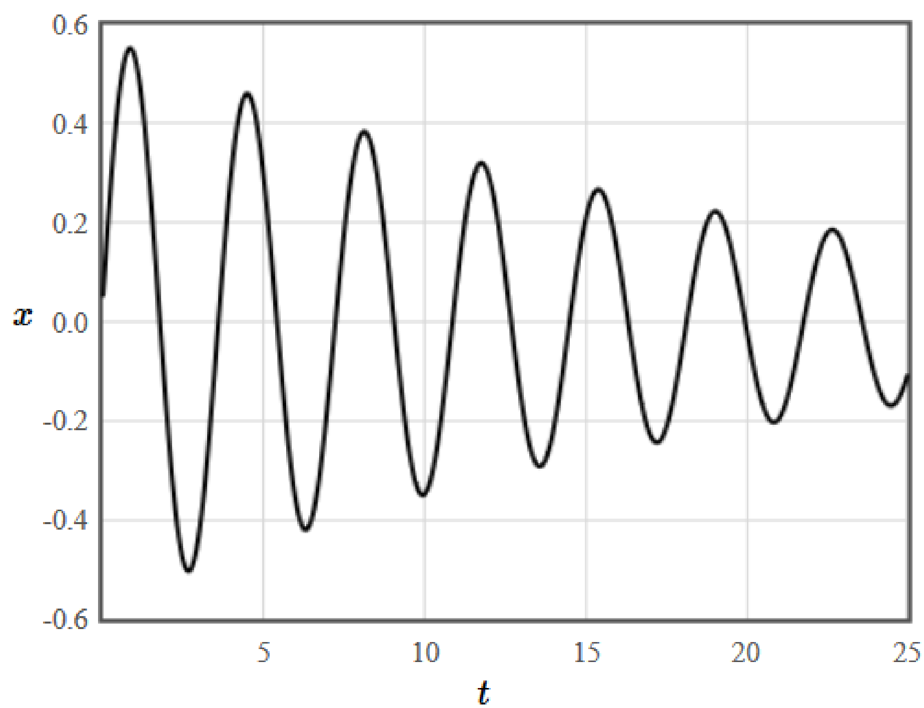


Massa - Feder mit Reibung



$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - av_x$$

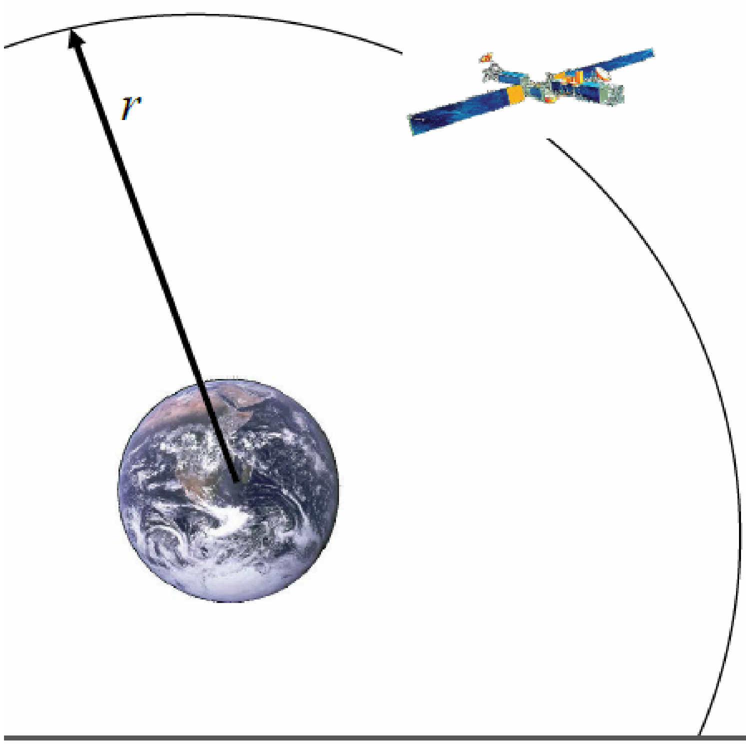
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{a}{m}v_x$$



Satellitenbahnen

$$\vec{F} = \frac{-G m_{erde} m_{sat}}{r^2} \hat{r}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{-G m_{erde} m_{sat} x}{m_{sat} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$



Numerical 6th order differential equation solver

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$\frac{dv_x}{dt} =$ -x*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$\frac{dv_y}{dt} =$ -y*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$\frac{dv_z}{dt} =$ -z*6.6726E-11*5.97219E24/pow(x*x+y*y+z*z,3/2)

Initial conditions:

$t_0 =$ 0

$x(t_0) =$ 0

$v_x(t_0) =$ 7900

$y(t_0) =$ 6371000

$v_y(t_0) =$ 0

$z(t_0) =$ 0

$v_z(t_0) =$ 0

$\Delta t =$ 60

N_{steps} 1500

Plot: y vs. x