21. Wellen

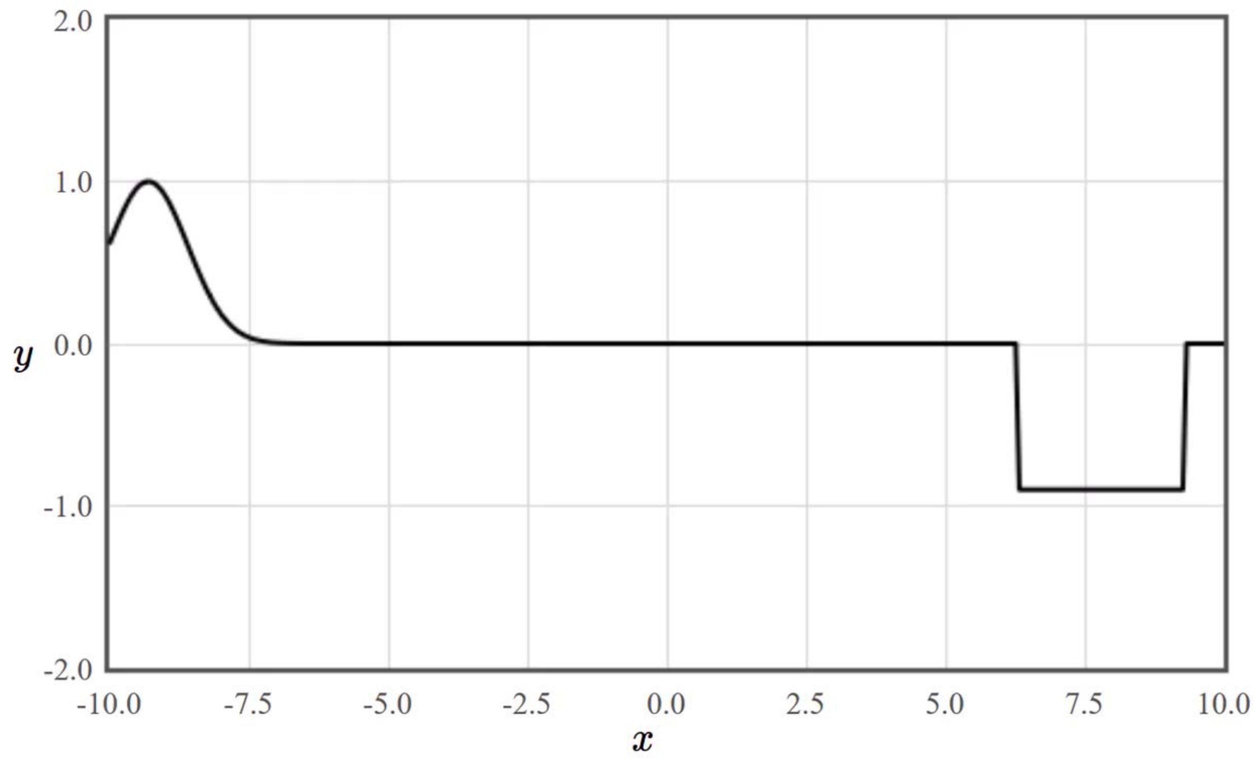
7. Jan. 2019

Überlagerung von Wellen

- Reflektion und Transmission von Wellen an Grenzflächen
- Ausprägen und Eigenschaften stehender Wellen
- Überlagerung der Bewegung von Beobachter und Wellenquelle

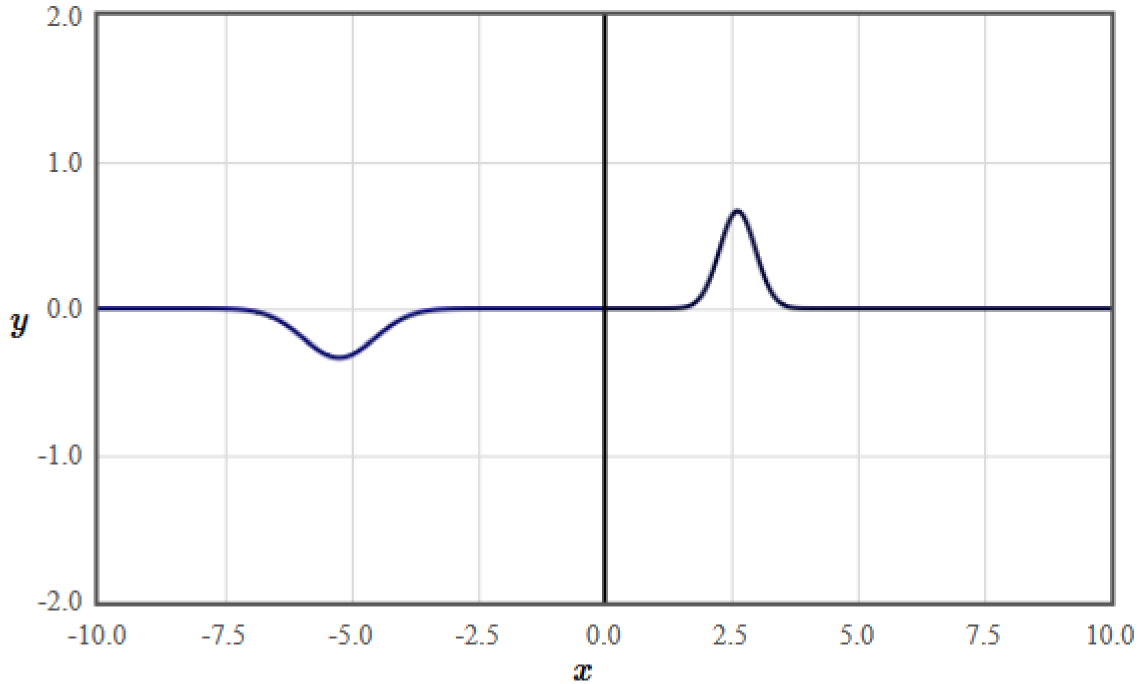
Superpositionsprinzip

die Summe von zwei Lösungen für die Wellengleichung ist auch eine Lösung für die Wellengleichung



http://lampx.tugraz.at/~hadley/physikm/apps/superposition/superposition.en.php

reflektierte und durchgelassene Wellen



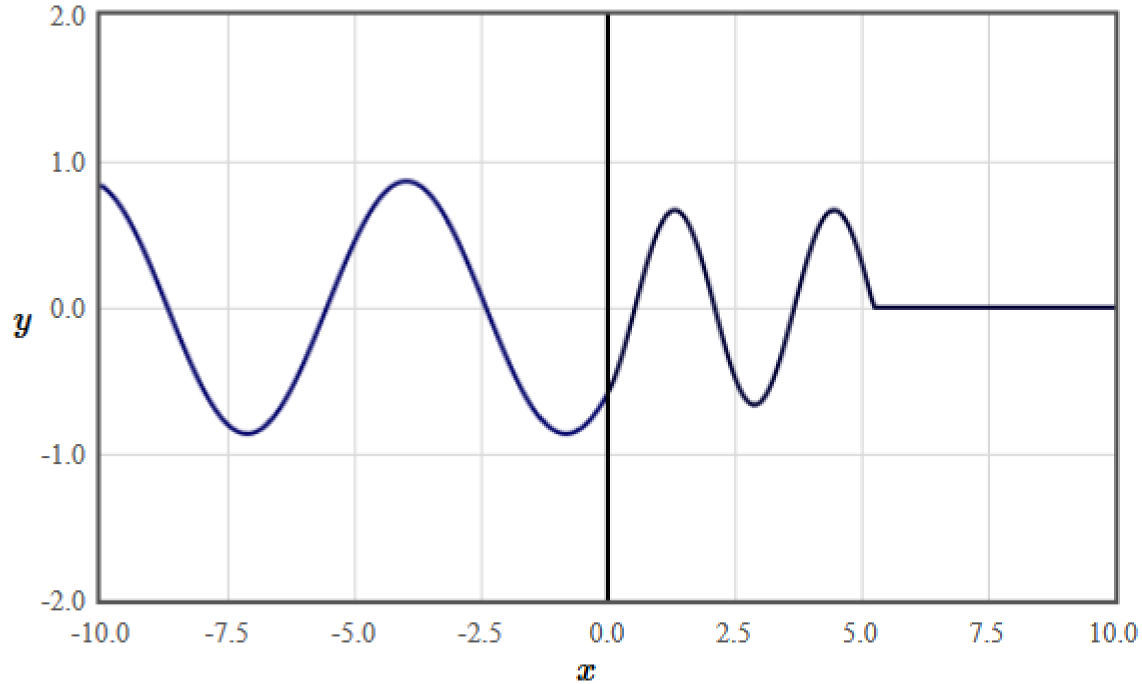
$$A_r = A_i \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$$

$$A_t = A_i \frac{2c_2}{c_2 + c_1}$$

A_i - einfallenden Welle
A_r - reflektierte Welle
A_t - durchgelassenen Welle

http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/physikm/apps/pulse.en.php

reflektierte und durchgelassene Wellen



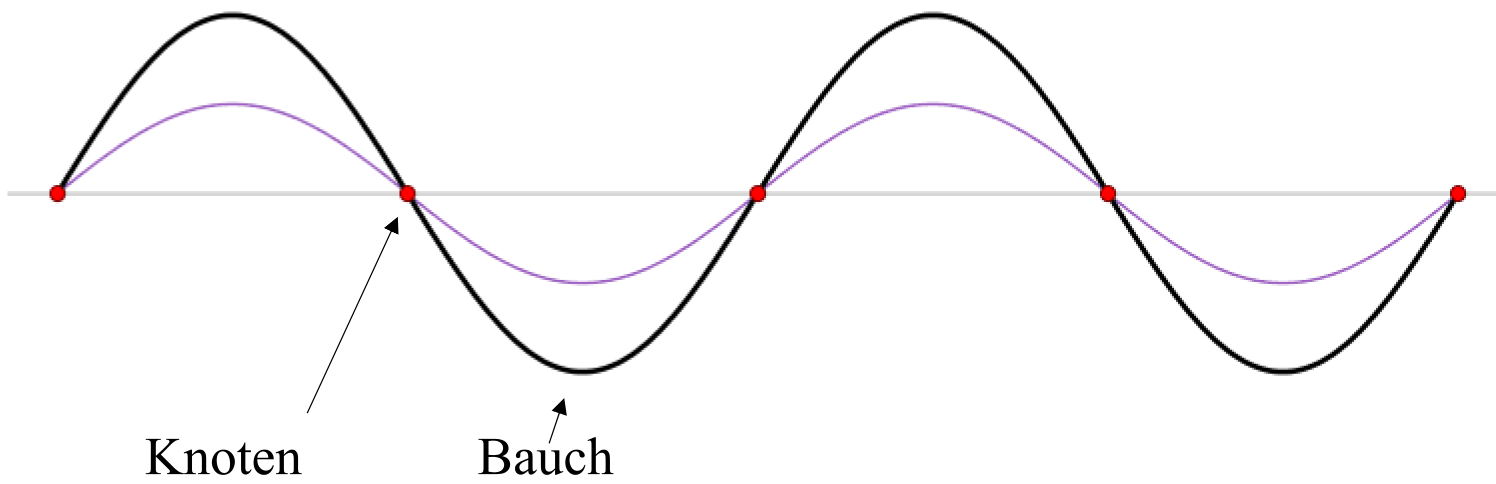
$$A_r = A_i \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$$

$$A_t = A_i \frac{2c_2}{c_2 + c_1}$$

A_i - einfallenden Welle
A_r - reflektierte Welle
A_t - durchgelassenen Welle

http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/physikm/apps/cw_reflection.en.php

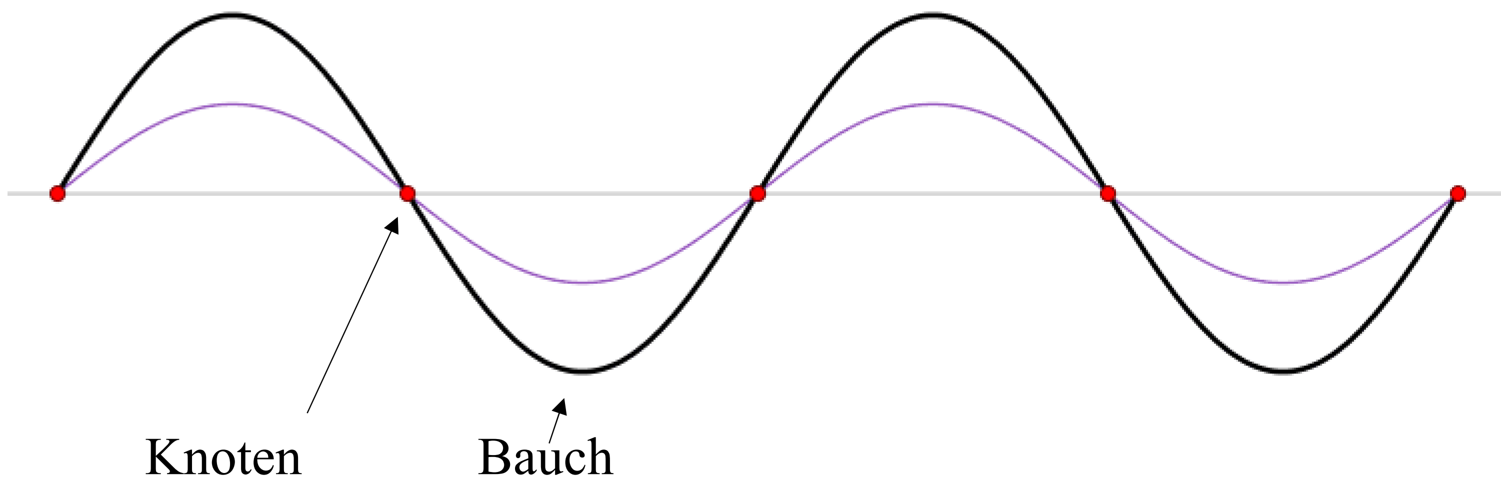
Stehende Welle



Eine stehende Welle kann als Überlagerung zweier gegenläufig fortschreitender Wellen gleicher Frequenz und gleicher Amplitude aufgefasst werden.

http://de.wikipedia.org/wiki/Stehende_Welle#mediaviewer/File:Standing_wave_2.gif

Stehende Welle



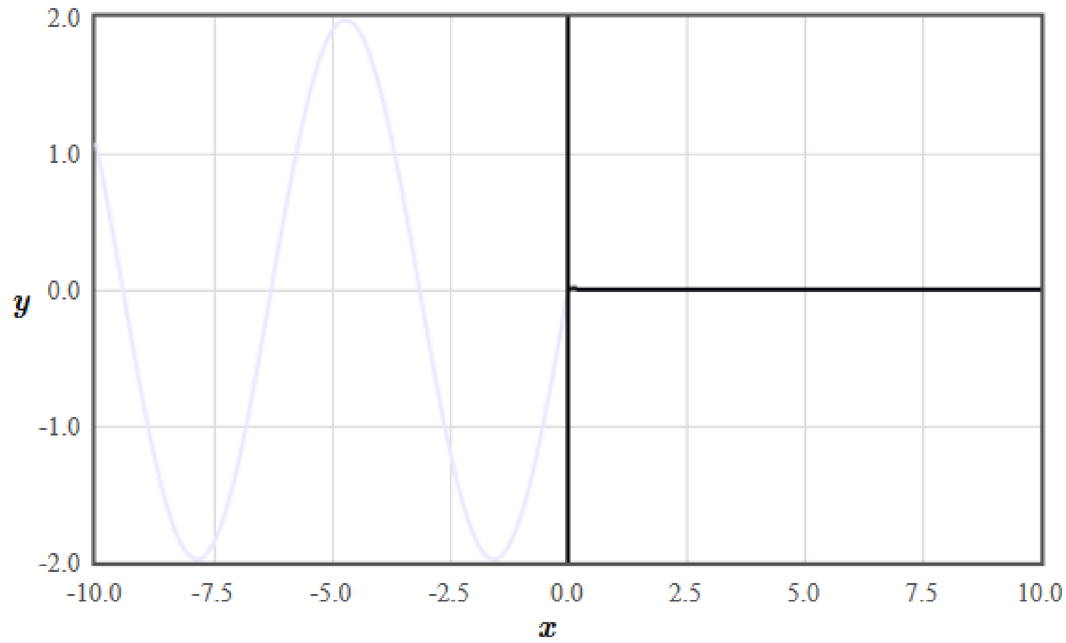
$$\cos(x-t)+\cos(x+t)$$

$$\cos(x)\cos(t)+\sin(x)\sin(t)+\cos(x)\cos(t)-\sin(x)\sin(t)$$

$$2\cos(x)\cos(t)$$

http://de.wikipedia.org/wiki/Stehende_Welle#mediaviewer/File:Standing_wave_2.gif

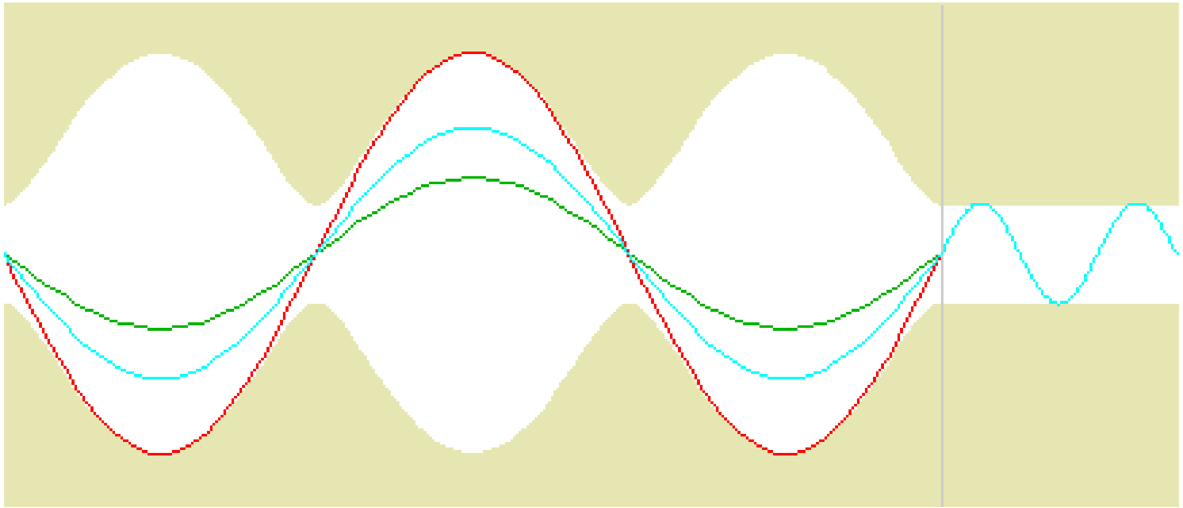
festes Ende



Amplitude der reflektierten Welle ist gleich der Amplitude der einfallenden Welle
reflektierte Welle invertiert
Knoten an der Schnittstelle

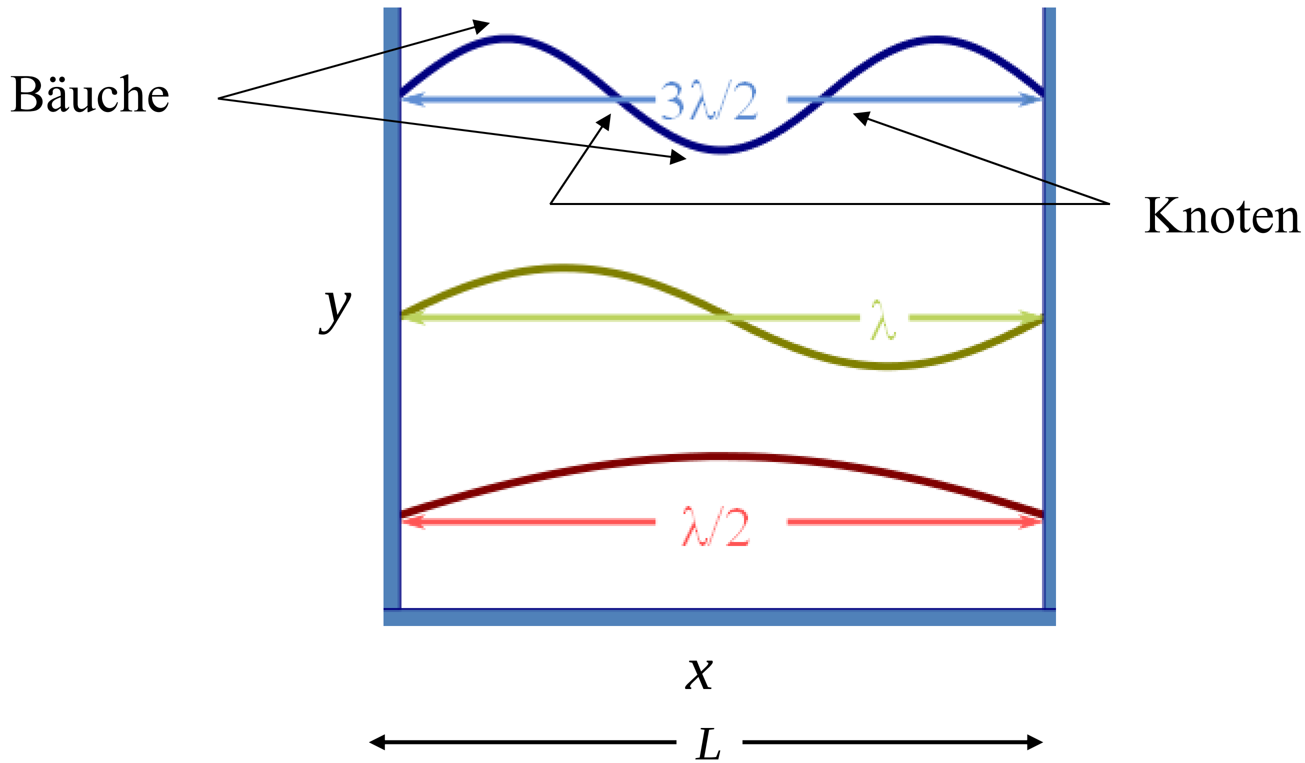
http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/physikm/apps/cw_reflection.en.php

stehende Welle, die auf einem Wellenleiter durch Reflexion entsteht



http://de.wikipedia.org/wiki/Stehwellenverh%C3%A4ltnis#mediaviewer/File:Standing_wave_SWR_4_%28forward,_reflected%29_open.gif

Stehende Welle

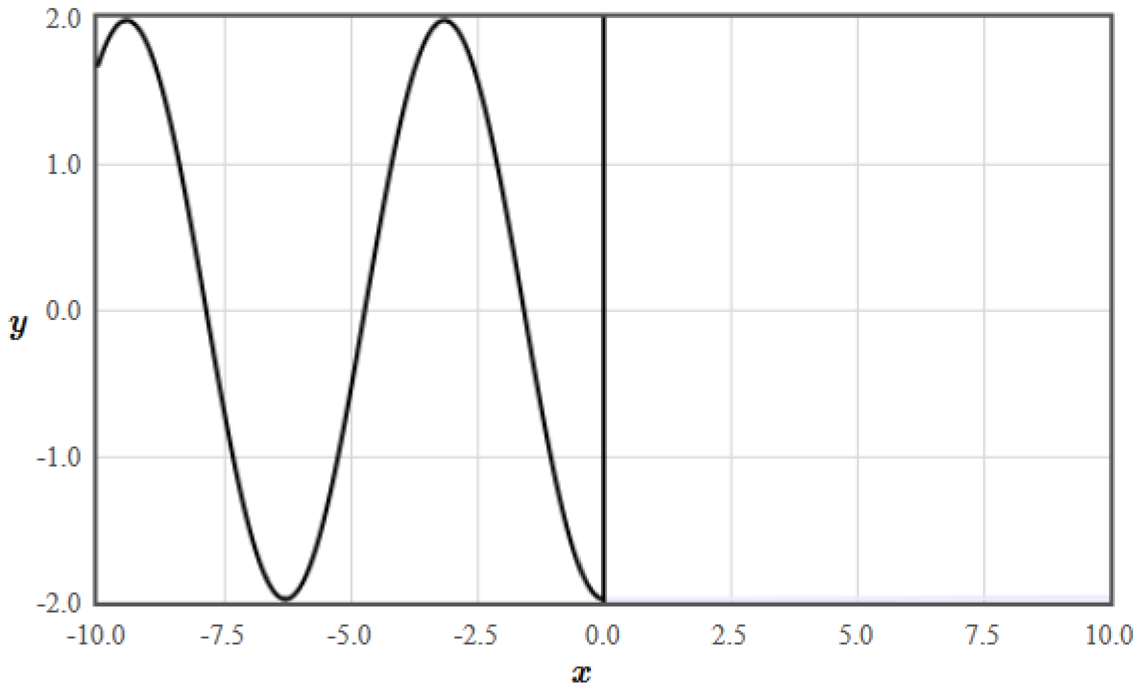


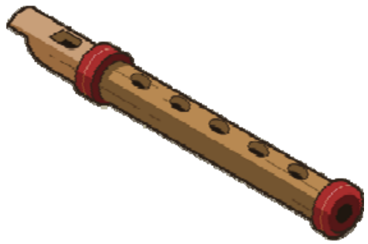
$$y = A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{nL}{2} \qquad n = 1, 2, 3\cdots$$

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b1/Waves_in_Box.svg

freies Ende





Amplitude der reflektierten Welle ist gleich der Amplitude der einfallenden Welle
reflektierte Welle aufrecht
Schwingungsbauch an der Schnittstelle

http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/physikm/apps/cw_reflection.en.php

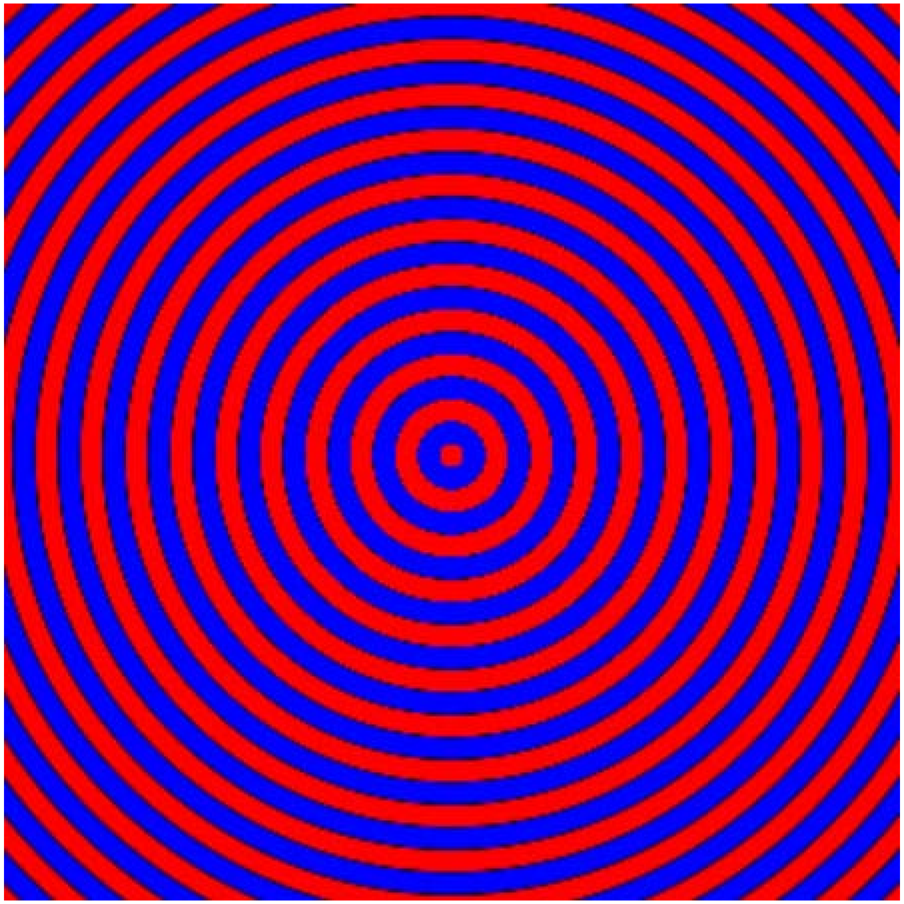
Kugelwelle

2-D:

$$\frac{A}{\sqrt{r}}\cos\left(kr-\omega t+\varphi\right)$$

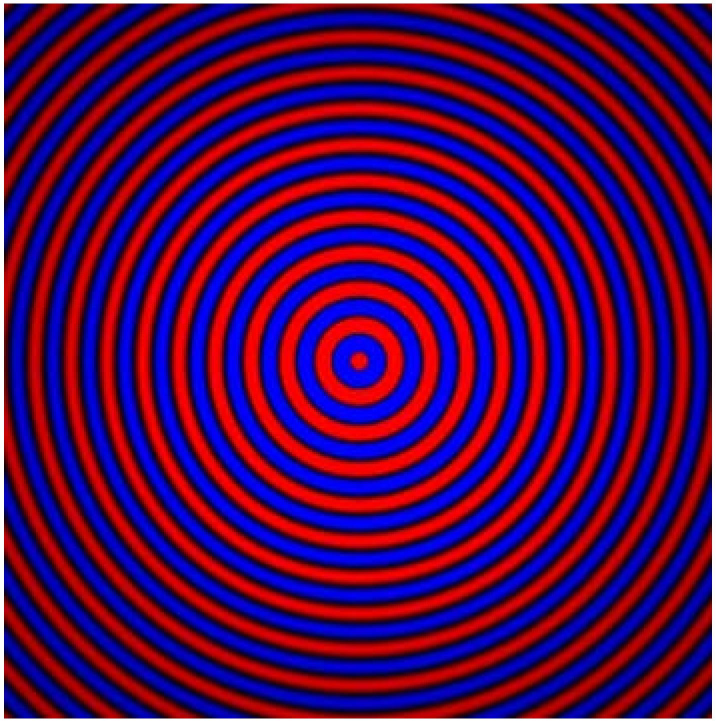
3-D:

$$\frac{A}{r}\cos\left(kr-\omega t+\varphi\right)$$



Energie 2-D

$$y(r,t) = \frac{A}{\sqrt{r}}\cos(kr - \omega t)$$



$$E_{pot} = -\int F dy = \frac{m\omega^2 y^2}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega\frac{A}{\sqrt{r}}\sin(kr - \omega t)$$

Energie 2-D

$$y(r,t) = \frac{A}{\sqrt{r}}\cos(kr - \omega t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega\frac{A}{\sqrt{r}}\sin(kr - \omega t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2\frac{A}{\sqrt{r}}\cos(kr - \omega t)$$

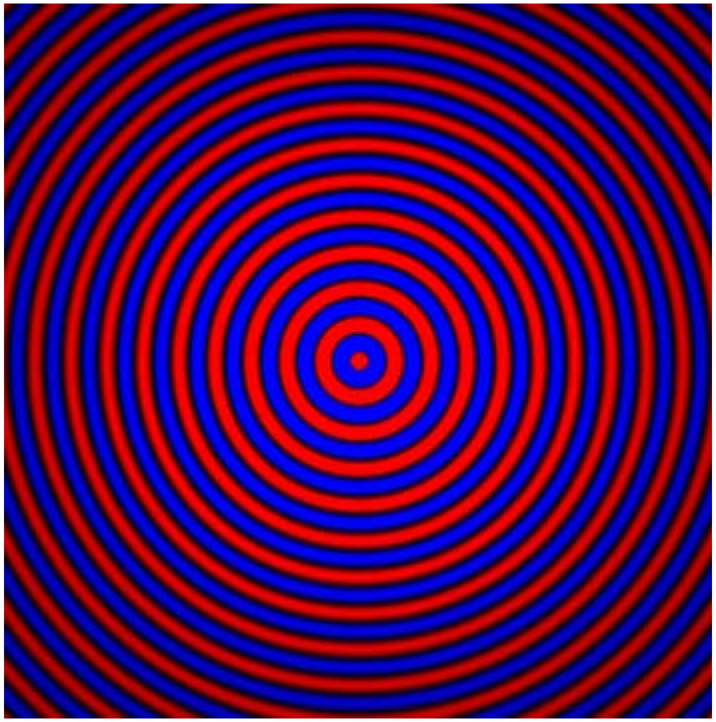
$$F = ma = -m\omega^2 y$$

$$E_{pot} = -\int F dz = \frac{m\omega^2 y^2}{2}$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$E_{tot}(r) = \frac{2\pi r\omega^2 A^2\rho dr}{2r}\left(\cos^2(kr - \omega t) + \sin^2(kr - \omega t)\right)$$

$$= \pi\omega^2 A^2\rho dr$$



ρ = Massendichte [kg/m^2]

Energie 2-D

$$z(r,t) = \frac{A}{\sqrt{r}}\cos(kr - \omega t)$$

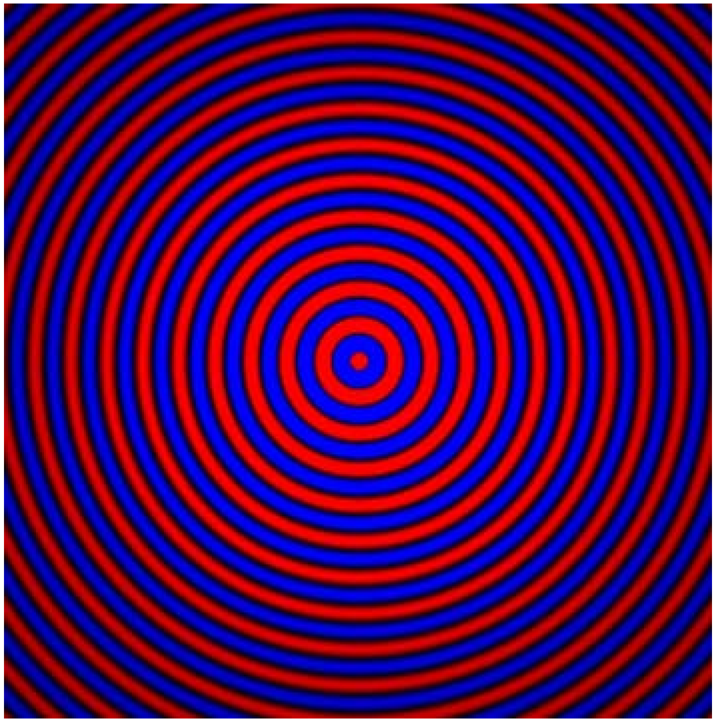
$$\frac{dz}{dt} = \omega\frac{A}{\sqrt{r}}\sin(kr - \omega t)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2\frac{A}{\sqrt{r}}\cos(kr - \omega t)$$

$$F = ma = -m\omega^2 z$$

$$E_{pot} = -\int F dz = \frac{m\omega^2 z^2}{2}$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$



$$E_{tot}(r) = \frac{2\pi r\omega^2 A^2 \rho dr}{2r}\left(\cos^2(kr - \omega t) + \sin^2(kr - \omega t)\right) = \pi\omega^2 A^2 \rho dr$$

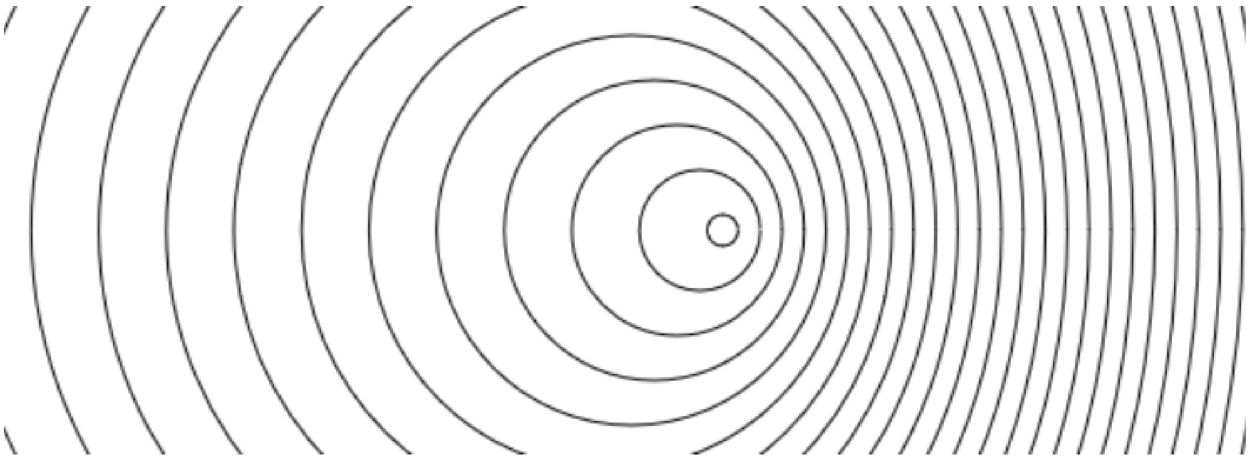
ρ = Massendichte [kg/m^2]

http://en.wikipedia.org/wiki/Doppler_effect

Dopplereffekt

Christian Doppler

Bewegte Wellenquelle

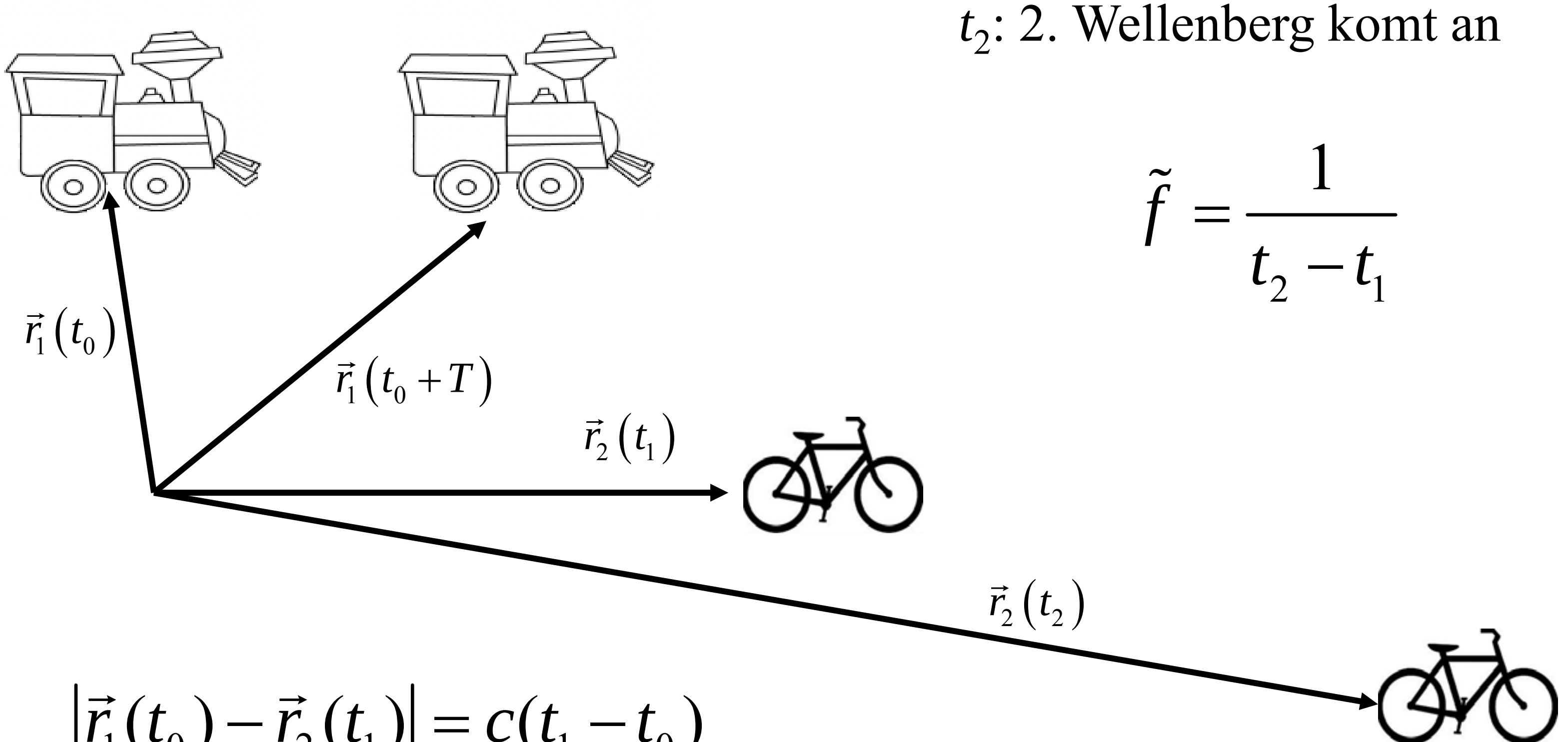


http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/physikm/apps/shockwave.en.php?vc=0.2

Dopplereffekt

t_0: 1. Wellenberg verlässt Zug
t_1: 1. Wellenberg komt an
t_0+T: 2. Wellenberg verlässt Zug
t_2: 2. Wellenberg komt an

$$\tilde{f} = \frac{1}{t_2 - t_1}$$



$$\left|\vec{r}_1(t_0) - \vec{r}_2(t_1)\right| = c(t_1 - t_0)$$

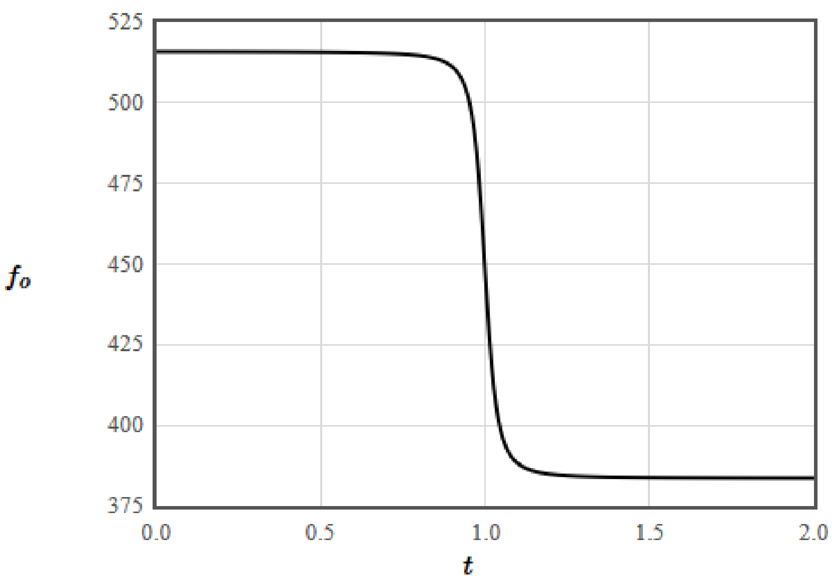
$$\left|\vec{r}_1(t_0+T) - \vec{r}_2(t_2)\right| = c(t_2 - t_0 - T)$$

Dopplereffekt

$$|\vec{r}_o(t_1) - \vec{r}_s(t_0)| = c(t_1 - t_0),$$

$$|\vec{r}_o(t_2) - \vec{r}_s(t_0 + T)| = c(t_2 - t_0 - T),$$

$$f_o = \frac{1}{t_2 - t_1}.$$



$\vec{r}_s(t) =$ 50*t-50 $\hat{x}+$ 0 $\hat{y}+$ 0 $\hat{z}$ [m].

$\vec{r}_o(t) =$ 0 $\hat{x}+$ 2 $\hat{y}+$ 0 $\hat{z}$ [m].

$f_s =$ 440 [Hz] $c =$ 340 [m/s]

Plot f_o from $t =$ 0 to $t =$ 2.

At time $t = 0$ s, the observer hears a frequency of 515.8 Hz.

At time $t = 2$ s, the observer hears a frequency of 383.6 Hz.

http://lampx.tugraz.at/~hadley/physikm/apps/doppler.de.php

Dopplereffekt

Ein vorbeifahrender Zug pfeift mit einer Frequenz von 440 Hz. Die Position der Dampfpfeife des Zuges ist durch den Vektor gegeben:

$$\vec{r}_1(t) = 23t\hat{x} + 25t\hat{y} + 10\hat{z}\ \text{[m]}.$$

Dabei ist t die Zeit in Sekunden. Ein Mädchen auf einem Fahrrad hat die Geschwindigkeit,

$$\vec{r}_2(t) = 6t\hat{x} + 3t\hat{y} + 0\hat{z}\ \text{[m]}.$$

Welche Frequenz hört das Mädchen an $t = 5$ s?

$\tilde{f}$ = [Hz]

Lösung

Die Schallgeschwindigkeit ist $c = 340$ m/s. Finden die Lösung mittels der APP Graphisches Lösen.

Die Gleichungen für den Dopplereffekt lauten zusammengefasst:

$$\boxed{\begin{aligned} &|\vec{r}_2(t_1) - \vec{r}_1(t_0)| = c(t_1 - t_0)\,, \\ &|\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_0 + T)| = c(t_2 - t_0 - T)\,, \\ &\tilde{f} = \tfrac{1}{t_2 - t_1}\,. \end{aligned}}$$

Das Mädchen hört die Pfeife zur Zeit $t = 5$ s. Sei dies der Zeitpunkt t_1, bei welchem der erste Wellenbauch ihr Ohr erreicht. Die folgende Gleichung kann nach t_0 aufgelöst werden:

$$|\vec{r}_2(t_1) - \vec{r}_1(t_0)| = c(t_1 - t_0)\,.$$

Der Abstand zwischen den Vektoren lautet ausgeschrieben:

$$\sqrt{(6 * 5 - 23 * t_0)^2 + (3 * 5 - 25 * t_0)^2 + (10)^2} = 340(5 - t_0),$$

Eine solche Gleichung kann graphisch gelöst werden, indem man beide Seiten der Gleichung in einem gemeinsamen Diagramm graphisch darstellt. Um die APP **Graphisches Lösen** für die Bestimmung von t_0 benutzen zu können, sei

y_1 = sqrt(pow(6*5-23*x,2)+pow(3*5-25*x,2)+100),

y_2 = 340*(5 - x).

Die Zeit ist $t_0 = 4.6271$ s.

Die andere Bestimmungsgleichung für den Dopplereffekt lautet

$$|\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_0 + T)| = c(t_2 - t_0 - T)\,.$$

Diese kann für t_2 gelöst werden, d.h. der Zeit, bei der der nächste Peak ihr Ohr erreicht. Der Abstand zwischen den Vektoren lautet ausgeschrieben:

$$\sqrt{(6 * t_2 - 23 * (4.6271 + 1/440))^2 + (3 * t_2 - 25 * (4.6271 + 1/440))^2 + (10)^2} = 340(t_2 - 4.6271 - 1/440),$$

Um die APP **Graphisches Lösen** für die Bestimmung von t_2 benutzen zu können, sei

y_1 = sqrt(pow(6*x-23*(4.6271+1/440),2)+pow(3*x-25*(4.6271+1/440),2)+100),

y_2 = 340*(x-4.6271-1/440).

Die Zeit ist $t_2 = 5.0025$ s.

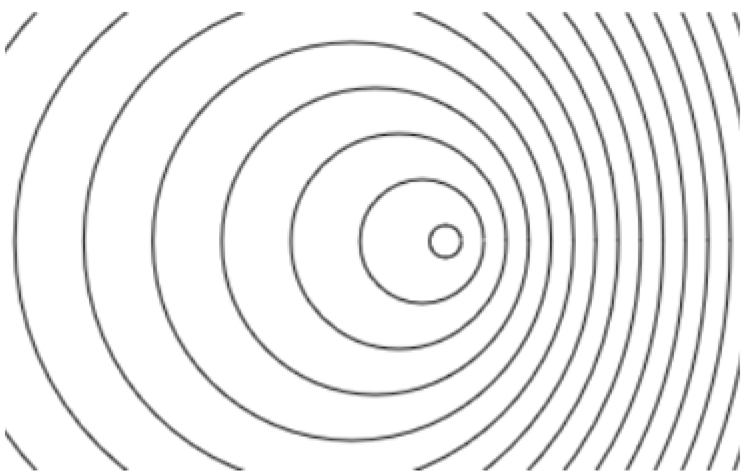
Das Mädchen hört nimmt die Frequenz $\tilde{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} = 407$ Hz wahr.

Dopplereffekt

$$|\vec{r}_2(t_1) - \vec{r}_1(t_0)| = c(t_1 - t_0),$$

$$|\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_0 + T)| = c(t_2 - t_0 - T),$$

$$\tilde{f} = \frac{1}{t_2 - t_1}.$$



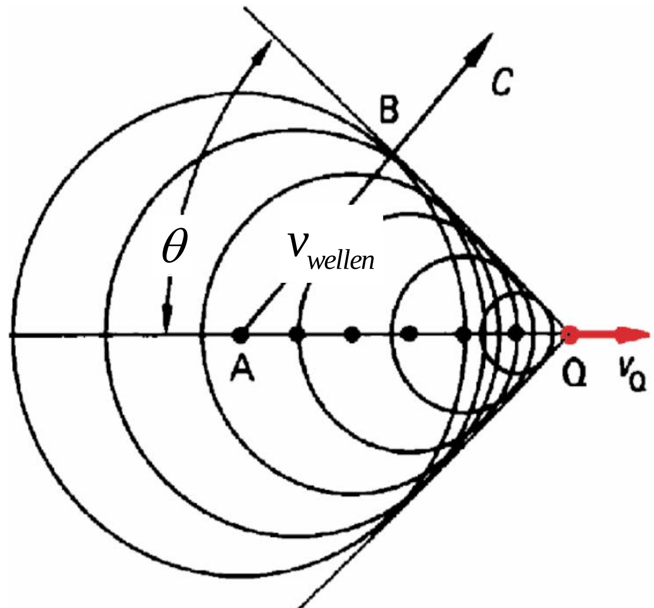
Quelle	Beobachter	beobachtete Frequenz	
$\bullet$	$\leftarrow\bullet$	$f_B = f_Q\left(1 + \frac{v_B}{c}\right)$	(5.205)
$\bullet$	$\bullet\rightarrow$	$f_B = f_Q\left(1 - \frac{v_B}{c}\right)$	(5.206)
$\bullet\rightarrow$	$\bullet$	$f_B = \frac{f_Q}{1 - \frac{v_Q}{c}}$	(5.207)
$\leftarrow\bullet$	$\bullet$	$f_B = \frac{f_Q}{1 + \frac{v_Q}{c}}$	(5.208)
$\bullet\rightarrow$	$\leftarrow\bullet$	$f_B = f_Q\frac{c + v_B}{c - v_Q}$	(5.209)
$\leftarrow\bullet$	$\bullet\rightarrow$	$f_B = f_Q\frac{c - v_B}{c + v_Q}$	(5.210)
$\leftarrow\bullet$	$\leftarrow\bullet$	$f_B = f_Q\frac{c + v_B}{c + v_Q}$	(5.211)
$\bullet\rightarrow$	$\bullet\rightarrow$	$f_B = f_Q\frac{c - v_B}{c - v_Q}$	(5.212)

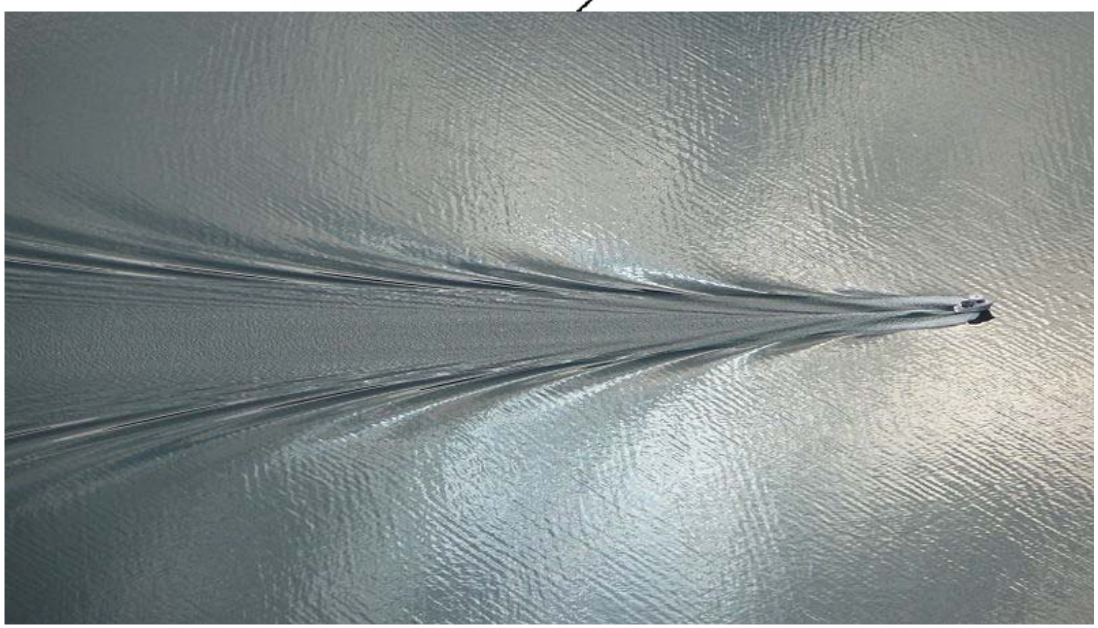
Hering

Überschallgeschwindigkeit

Hering

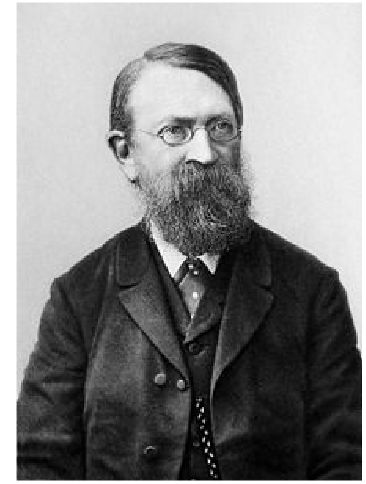
$$\sin\theta = \frac{v_{wellen}}{v_{flugzeug}}$$





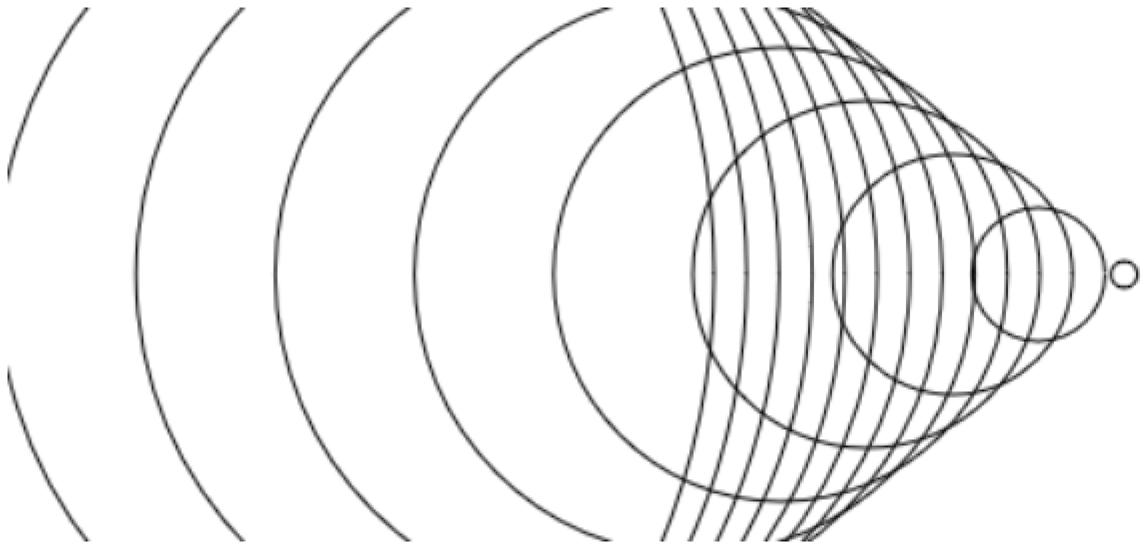
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Fjord.surface.wave.boat.jpeg

Mach-Zahl $= \dfrac{v}{v_{wellen}}$



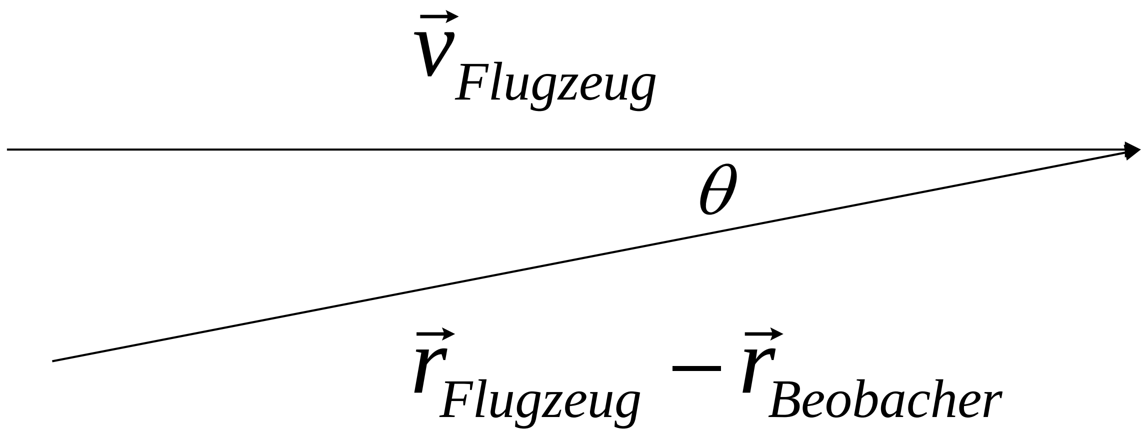
Ernst Mach

Bewegte Wellenquelle



http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/physikm/apps/shockwave.en.php

Überschallgeschwindigkeit



$$\sin\theta = \frac{\left|\vec{v}_{wellen}\right|}{\left|\vec{v}_{flugzeug}\right|}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_{Flugzeug} \cdot \left(\vec{r}_{Flugzeug} - \vec{r}_{Beobacher}\right)}{\left|\vec{v}_{flugzeug}\right| \left|\vec{r}_{Flugzeug} - \vec{r}_{Beobacher}\right|}$$

Schockwellen

Die Position eines mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Flugzeugs sei:

$$\vec{r}_{\text{airplane}} = 474t\hat{x} + 523t\hat{y} + 1271\,\hat{z}\ \text{[m]}.$$

Hier ist t in Sekunden angegeben. Bei welcher Zeit hört ein Beobachter an der Position

$$\vec{r}_{\text{obs}} = 8424\hat{x} + 9444\hat{y} + 0\,\hat{z}\ \text{[m]},$$

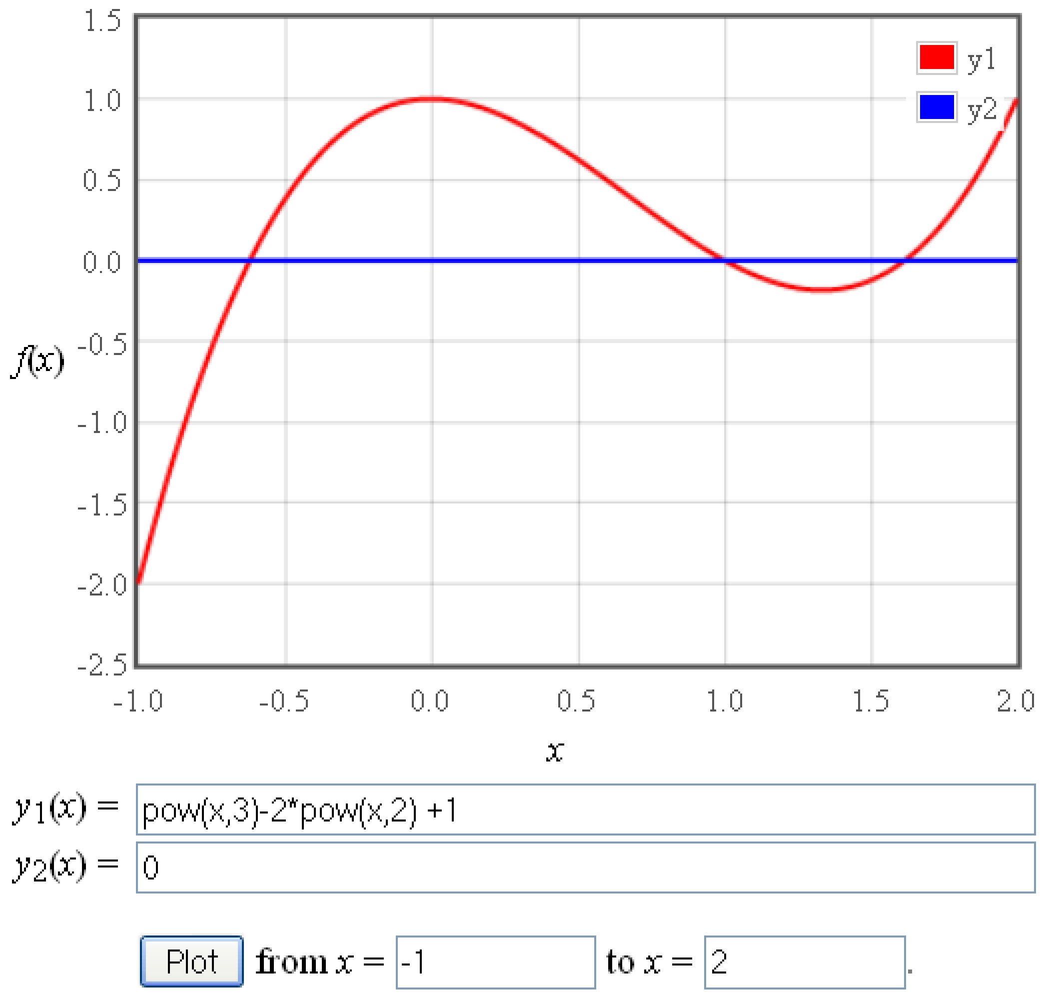
den Überschallknall?

$t =$ ______ [s]

Lösung

Die Schallgeschwindigkeit ist $c = 340$ m/s. Finden Sie die Lösung graphisch.

Graphische Lösungen



Der Geschwindigkeitsvektor des Flugzeugs ist $\vec{v}_{\text{airplane}} = 474\hat{x} + 523\hat{y} + 0\hat{z}$ [m/s].

Die Geschwindigkeit des Flugzeugs ist

$$|\vec{v}_{\text{airplane}}| = 706 \text{ m/s} = \text{Mach } 2.08.$$

Die Schockwelle formt einen Kegel um den Geschwindigkeitsvektor. Der Vektor, der von einem beliebigen Punkt dieses Kegels zum Flugzeug zeigt, definiert einen Winkel $\theta = \text{asin}\left(\frac{c}{|\vec{v}_{\text{airplane}}|}\right) =$ 0.503 rad = 29 deg.

Der Vektor vom Beobachter zum Flugzeug ist $\vec{r}_{\text{airplane}} - \vec{r}_{\text{obs}}$. Der Überschallknall wird eintreffen, wenn dieser Vektor den Winkel θ mit dem Geschwindigkeitsvektor einschließt.

$$\frac{(\vec{r}_{\text{airplane}} - \vec{r}_{\text{obs}})\cdot\vec{v}_{\text{airplane}}}{|\vec{v}_{\text{airplane}}||\vec{r}_{\text{airplane}} - \vec{r}_{\text{obs}}|} = \cos\theta.$$

$$\frac{474*474*t - 474*8424 + 523*523*t - 523*9444}{706*\sqrt{(474*t - 8424)^2 + (523*t - 9444)^2 + 1271^2}} = \cos(0.503).$$

Um graphisch Lösen zu können, sei

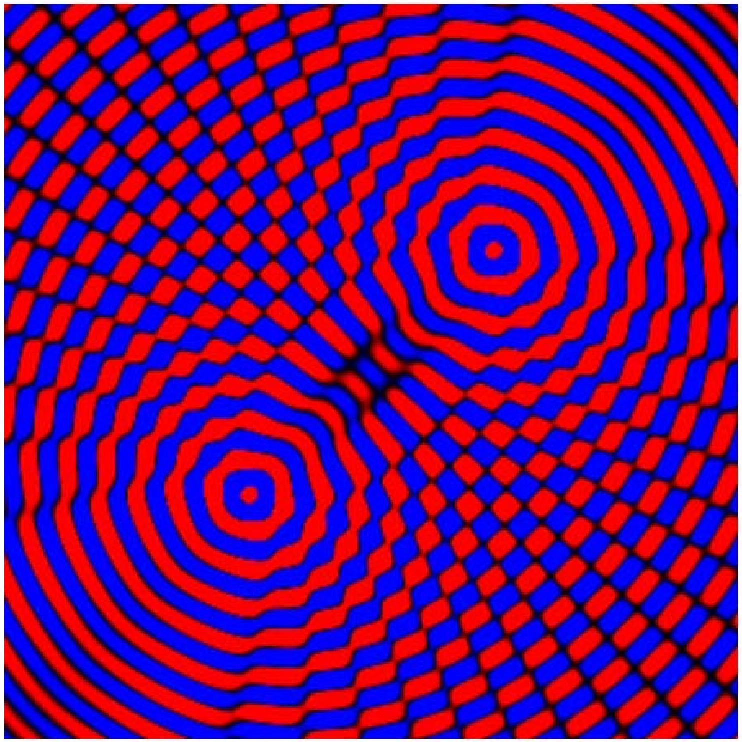
y_1 = (474*474*x-474*8424+523*523*x-523*9444)/(706*sqrt(pow(474*x-8424,2) + pow(523*x-9444,2) + pow(1271,2)))

und

y_2 = cos(0.503)

Der Überschallknall wird zur Zeit $t = 21.2$ s wahrgenommen.

Interferenz zweier Oberflächenwellen



$A_1 =$	0.1	[cm²]	$A_2 =$	0.1	[cm²]
$x_1 =$	2	[cm]	$x_2 =$	4	[cm]
$y_1 =$	2	[cm]	$y_2 =$	4	[cm]
$\phi_1 =$	0	[rad]	$\phi_2 =$	0	[rad]
$\lambda =$	0.3	[cm]	$T =$	0.5	[s]

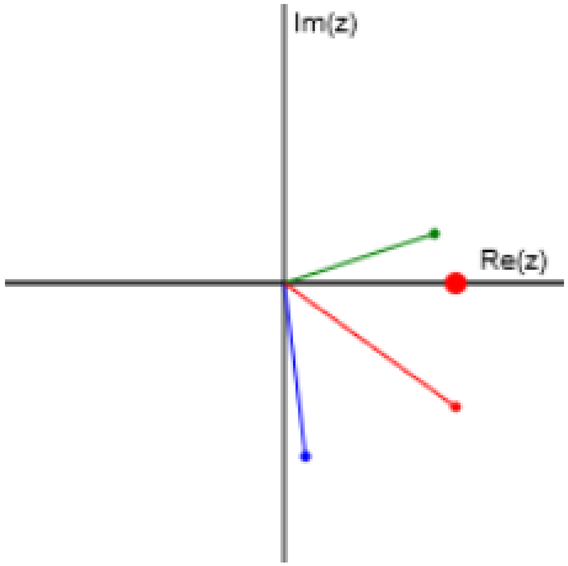
plot at $t =$ 0 [s].

t - T/10 t + T/10

$$c = \frac{\lambda}{T}$$

$$z(r,t) = \frac{A_1}{\sqrt{|r - r_1|}} \cos\left(k|r - r_1| - \omega t + \varphi_1\right) + \frac{A_2}{\sqrt{|r - r_2|}} \cos\left(k|r - r_2| - \omega t + \varphi_2\right)$$

Intensität interferierender Oberflächenwellen



$$|A| = 1.07 \text{ [cm]}$$