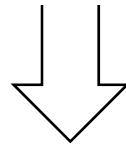


19. Schwingungen & Wellen

Schwingungen



**gekoppelte
Schwingungen**



Wellen

Problem 2

Eine Feder ist vertikal aufgehängt, so daß das freie Ende an $y = 0$ ist. Wird ein Gewicht der Masse 619 g bei der Feder angebracht, dehnt sich die Feder um 6 cm. Durch zusätzliches Ziehen am Gewicht dehnt sich die Feder um weitere 3 cm. Wird das Gewicht nun losgelassen, mit welcher Frequenz schwingt das Gewicht?

Die Erdbeschleunigung ist 9.81 m/s^2 .

$$f = \boxed{} \quad [\text{Hz}]$$

Problem 3

Eine Kugel mit der Masse 7 kg ist an einer nicht linearen Feder angebracht. Die Federkraft ist $F_{\text{feder}} = -3x|x|$ N. x ist hierbei die Auslenkung der Feder in Metern. Die Feder wird 2 cm von ihrer Ruheposition ausgelenkt.

(a) Wie viel Energie wird benötigt, um die Feder von $x = 0$ bis $x = 2$ cm zu dehnen?

$$W = \boxed{} \text{ [J]}$$

Bonus Frage 18.12.2015

Nicht lineare Feder

Ein Gewicht der Masse 4 kg wird an einer nicht linearen Feder angebracht. Die Federkraft ist $F_{\text{feder}} = -4x|x|$ N. x ist hierbei die Auslenkung von der Feder in Meter. Das Gewicht schwingt horizontal auf einem Tisch mit einer Reibungskraft, die entgegen der Richtung der Geschwindigkeit des Gewichts zeigt, $F_{\text{fric}} = -0.3 \frac{dx}{dt}$ N.

Bei $t = 0$ s: $x = 0$ m, $\frac{dx}{dt} = 2$ m/s.

Wo ist das Gewicht zum Zeitpunkt $t = 10$ s?

$x =$ [m]

Dieses Problem muß numerisch gelöst werden.

Erzwungene Schwingungen

Ein Gewicht der Masse 5 kg schwingt an einer Feder mit der linearen Federkonstante $k = 9 \text{ N/m}$. Die Schwingungen werden mit dem linearen Dämpfungskoeffizienten $b = 8 \text{ N s/m}$ gedämpft. Ein Motor zwingt das Gewicht zu schwingen. Treibt der Motor nach dem Einschalten das Gewicht eine derart lange Zeit an, sodaß das Einschwingen vollständig abgeklungen ist, dann kann die Bewegung des Gewichtes so beschrieben werden:

$$x(t) = 0.04 \sin(7t) \text{ [m]}.$$

Wie groß ist die treibende Kraft des Motors zur Zeit $t = 6 \text{ s}$?

$F =$ [N] [Lösung](#)

The amplitude of the driving force that the motor exerts can be determined from the steady-state solution,

$$|A| = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2}}.$$

Here $|A| = 0.04$ [m] and $\omega = 7$ [rad/s]. The amplitude of the driving force is,

$$F_0 = 9.70 \text{ [N]}.$$

The phase between the force and the steady-state response is,

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{\omega b}{k-m\omega^2}\right).$$

$$\theta = 2.91 \text{ [rad]}. \quad -0.233 \text{ [rad]}$$

The driving force leads the steady-state response by an angle θ ,

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t + \theta).$$

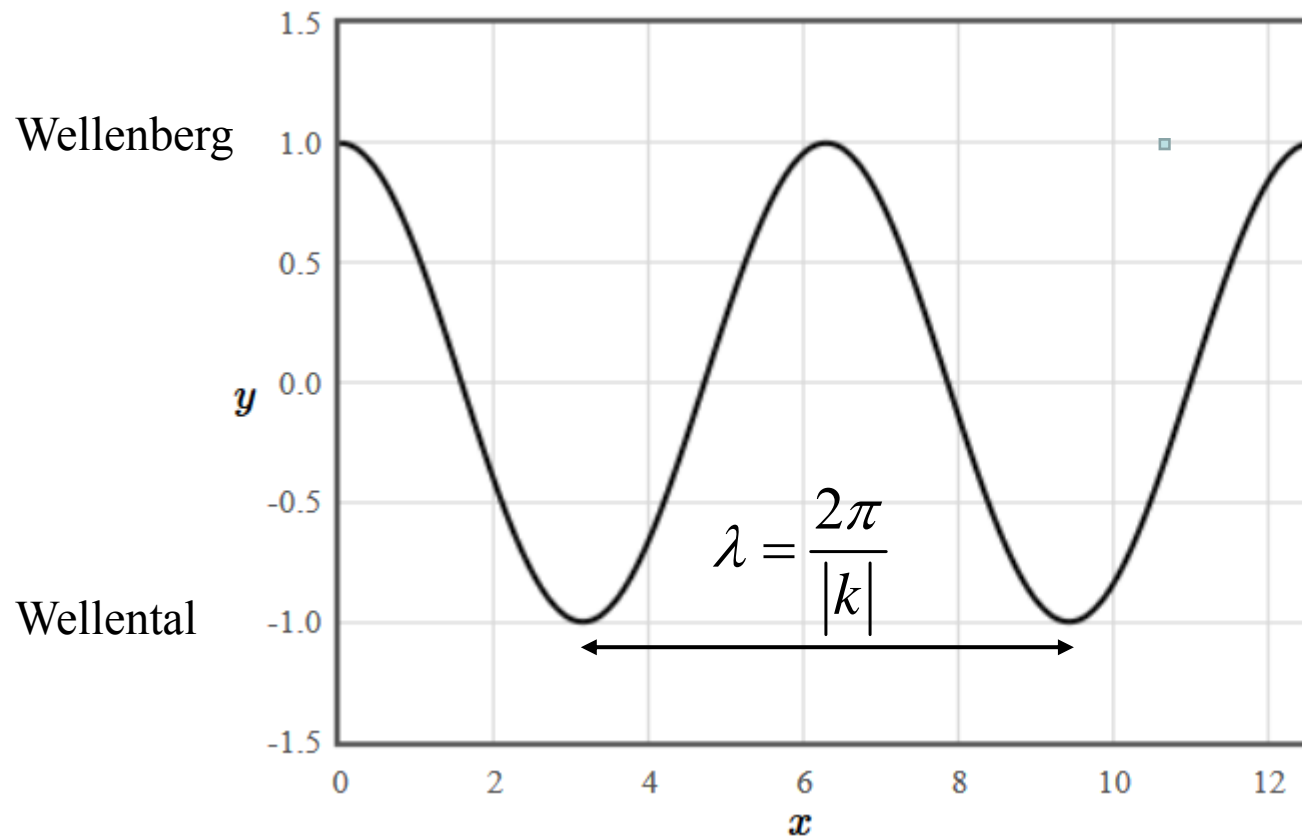
At time $t = 6$, the force is,

$$F = 7.76 \text{ [N]}.$$

Wellenzahl

$$y = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

Wellenzahl [rad/m]

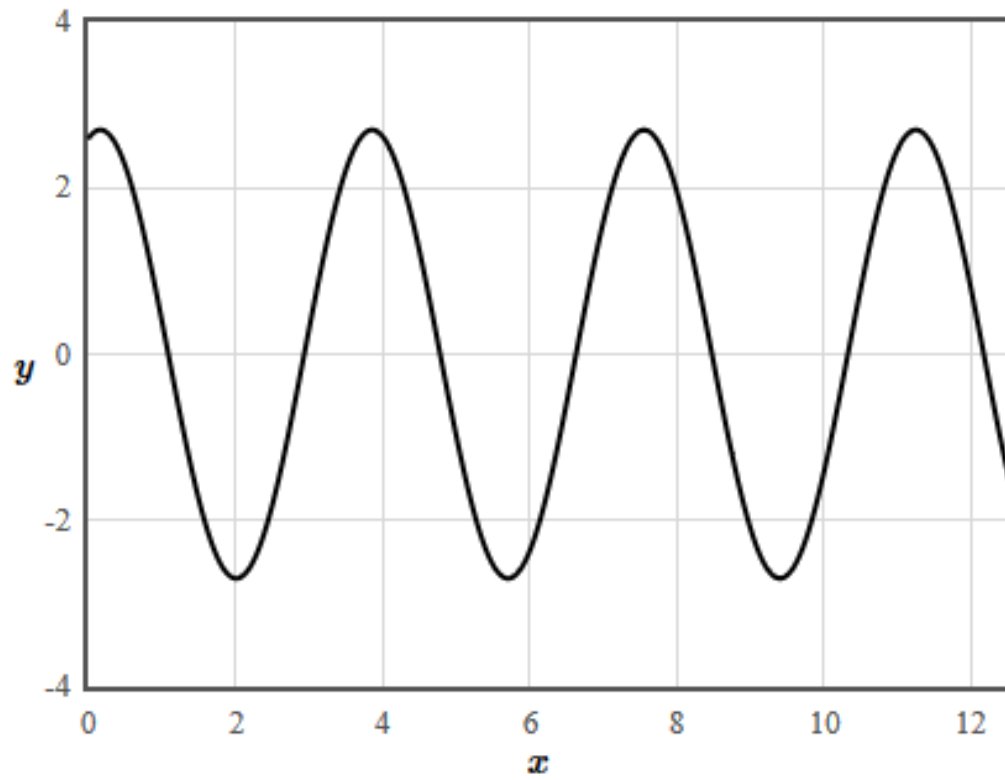



Wellenausbreitung


Eine sich ausbreitende Welle hat die Form


$$y = A \cos(kx - \omega t + \varphi).$$


Ist $k\omega > 0$, bewegt sich die Welle in $+x$ -Richtung und bei $k\omega < 0$ in die $-x$ Richtung.



$A = 2.7$ [m] 

$k = 1.7$ [1/m] 

$\omega = 0.3$ [rad/s] 

$\varphi = 0$ [rad] 

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|} = 3.70 \text{ [m]}$$

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 20.9 \text{ [s]}$$

$$t = 21.9$$

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Partielle Differentialgleichung

harmonischen Wellen sind die Eigenmoden der Wellengleichung

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$c = \frac{\lambda}{T}$$

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Partielle Differentialgleichung

$$y = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = c^2 k^2 \qquad c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \qquad f = \frac{c}{\lambda}$$

harmonischen Wellen sind die Eigenmoden der Wellengleichung

Energie

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(kx - \omega t)$$

$$F = ma = -m\omega^2 y \quad \text{Hookesches Gesetz}$$

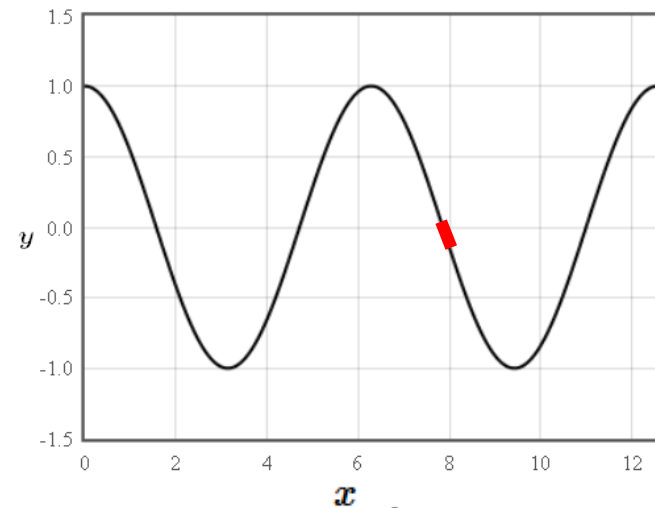
$$E_{pot} = -\int F dy = \frac{m\omega^2 y^2}{2}$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

$$E_{tot} = \frac{\omega^2 A^2 \rho dx}{2} (\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t)) = \frac{\omega^2 A^2 \rho dx}{2}$$

ρ = Massendichte [kg/m]

$$y = A \cos(kx - \omega t + \varphi).$$



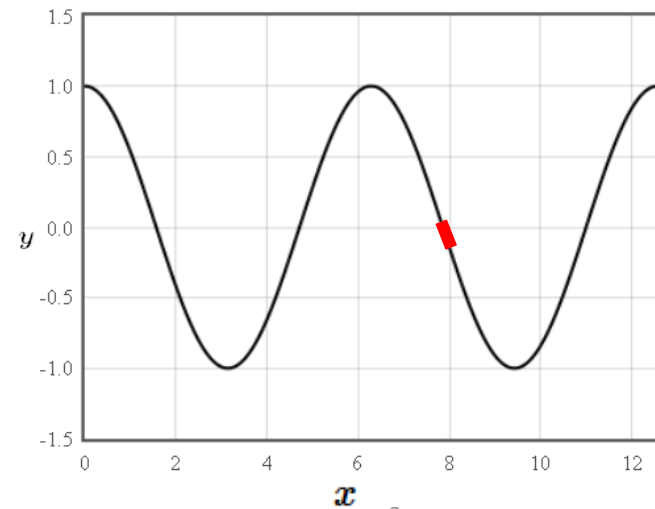
Leistung

$$E_{tot} = \frac{\omega^2 A^2 \rho dx}{2} \text{ [J]}$$

$$P = \frac{\omega^2 A^2 \rho \lambda}{2 T} \left[\frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} \right]$$

$$P = \frac{\omega^2 A^2 \rho}{2} c \text{ [W]}$$

$$y = A \cos(kx - \omega t + \varphi).$$



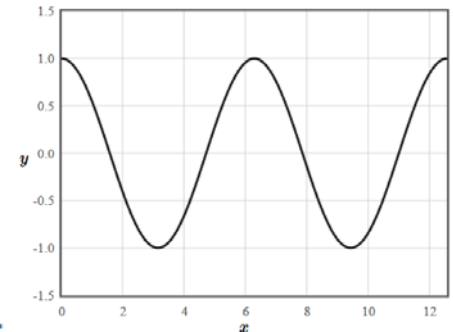
ρ = Massendichte [kg/m]

c = Wellengeschwindigkeit [m/s]

Wellenausbreitung

Eine sich ausbreitende Welle hat die Form

$$y = -57 \cos(-63x + 35t + 17).$$



Hier werden x und y in Metern und t in Sekunden angegeben.

Wie groß ist die Wellenlänge?

$$\lambda = \text{[] [m]}$$

Wie groß ist die Periode?

$$T = \text{[] [s]}$$

Wie lautet die Wellengeschwindigkeit?
(Die Geschwindigkeit kann negativ werden.)

$$v = \text{[] [m/s]}$$

Welchen Maximalwert kann $\frac{\partial y}{\partial t}$ annehmen?

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \text{[] [m/s]}$$

Welchen Maximalwert kann $\frac{\partial y}{\partial x}$ annehmen?

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \text{[]}$$

Lösung

Ein sich ausbreitende Welle,

$$y = A \cos(kx - \omega t + \phi),$$

hat die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{|k|} = 0.0997$ [m],

und die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 0.180$ [s].

Die Geschwindigkeit ist $v = \frac{\omega}{k} = 0.556$ [m/s].

Die Ableitung nach t liefert,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t + \phi),$$

Der Maximalwert von $\frac{\partial y}{\partial t}$ ist $|\omega A| = 1995$ [m/s].

Die Ableitung nach x liefert,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA \sin(kx - \omega t + \phi),$$

Der Maximalwert von $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist $|kA| = 3591$.

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Partielle Differentialgleichung

eine Lösung ist $y = f(kx - \omega t + \varphi)$

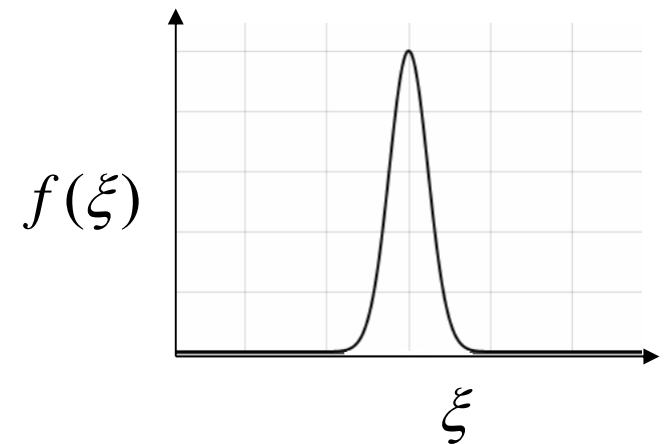
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

Kettenregel

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

$$\xi = kx - \omega t + \varphi$$



Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\omega^2 = c^2 k^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

jede Funktion der Form $y = f(kx - \omega t + \varphi)$ löst die Wellengleichung

harmonischen Wellen sind die Eigenmoden der Wellengleichung